

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В. ЛОМОНОСОВА
НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНОЙ
ФИЗИКИ ИМЕНИ Д.В. СКОБЕЛЬЦЫНА

На правах рукописи

УДК 530.145

ТИМОШЕНКО Эдуард Георгиевич

ГРАНИЧНЫЕ ЭФФЕКТЫ И КОНФАЙНМЕНТ В ТЕОРИИ
НЕАБЕЛЕВЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Специальность 01.04.02 – теоретическая физика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

НАУЧНЫЙ РУКОВОДИТЕЛЬ:

доцент,

кандидат физико-математических наук

Свешников Н.А.

Москва, 1995

Содержание

1. Введение	3
2. Некоторые свойства обобщенной калибровки Фока–Швингера	21
3. Гамильтонов формализм для теории Янга–Миллса в конечной области	31
4. Теория Янга–Миллса в формализме переменных на бесконечности	42
4.1. Некоторые сведения из формализма переменных на бесконечности	43
4.2. Динамика на бесконечности в теории Янга–Миллса .	54
4.3. Алгебра Пуанкаре в калибровке Фока–Швингера . . .	59
5. Зависимость статистической суммы от переменных на границе	61
5.1. Электродинамика с внешним зарядом	62
5.2. Формулировка в терминах коллективной переменной	67
5.3. Эффективное действие глюодинамики	69
6. Критерии конфайнмента. Вильсоновская петля	84
7. Заключение	96
8. Приложения	101

1. Введение

Проблема конфайнмента в неабелевой калибровочной теории уже несколько десятков лет привлекает самый живой интерес исследователей и является одной из самых актуальных для обоснования стандартной модели сильных и электрослабых взаимодействий. До сих пор все попытки поиска свободных кварков приводят к однозначному выводу о том, что они не наблюдаются в экспериментах по рассеянию элементарных частиц при энергиях вплоть до порядка десятков ГэВ [1, 2]. Еще в октетной модели кварков было предположено, что объекты с ненулевым цветным зарядом связаны мощными силами притяжения, которые не позволяют им существовать в свободных асимптотических состояниях, и, следовательно, наблюдаться экспериментально. Для того чтобы действительно удерживать частицы в малой области пространства, потенциал взаимодействия должен быть линейно растущим [3]. Квантовая хромодинамика, базирующаяся на теории неабелевых калибровочных полей Янга–Миллса [4], более двадцати лет [5, 6] считается хорошо установленной моделью для описания сильных взаимодействий. Открытие явления асимптотической свободы [7, 8, 9] привело к заметным успехам в применении теории возмущений для описания процессов при высоких энергиях [10, 11]. Тем не менее, существенная непертурбативность явлений при низких энергиях до сих пор не позволила достичь ясного понимания и объяснения ряда проблем, среди которых в первую очередь следует отметить конфайнмент, спонтанное нарушение киральной инвари-

антности и спектр масс адронов. Несмотря на значительный прогресс в изучении многих важных аспектов конфайнмента [12, 13], в научном сообществе до сих пор не существует согласия между различными подходами, которые пытаются вывести конфайнмент из фундаментальных законов КХД.

Перейдем теперь к краткому обзору этих подходов, не стремясь соблюдать хронологическую последовательность изложения, и лишь останавливаясь на тех из них, которые по нашему мнению представляют наибольший теоретический интерес. Безусловно, литература по настоящему вопросу чрезвычайно обширна, поэтому наше изложение не претендует на полноту.

Хотя концепция конфайнмента была первоначально введена для объяснения почему кварки могут наблюдаться только в составе адронов, конфайнмент должен объяснять прежде всего ненаблюдаемость цветных состояний квантов калибровочного поля – глюонов. Наиболее распространенный критерий конфайнмента основан на поведении Вильсоновской петли, которая характеризует потенциальную энергию взаимодействий двух пробных статических источников цветового заряда, однако из него не следует конфайнмент глюонов. Есть основания ожидать, что сущность механизма конфайнмента обязана своему возникновению именно динамике калибровочных полей. Поэтому мы ограничимся рассмотрением квантовой глюодинамики и не будем касаться вопроса о включении динамических кварков.

Были предприняты многочисленные попытки исследовать проблему конфайнмента в математически более простых теориях, ко-

торые являются прототипами КХД. Прежде всего, конфайнмент существует в глюодинамике в двух пространственных измерениях, где он, однако, выполняется автоматически, так как Кулоновский потенциал точечного заряда в двумерии является линейно растущим. Тем не менее, из такой теории было получено много интересной физической информации о спектре состояний теории [14].

Изучение компактной электродинамики в трех измерениях было интенсивно проведено как аналитическими методами [15, 16, 17, 18], так и численно [19]. Эта теория обладает рядом интересных свойств, таких как: конфайнмент, динамическая генерация массы, ненулевой коэффициент натяжения струны. Замечательно, что в ней монополи являются инстантонными решениями и учет только их вклада дает правильную величину Вильсоновской петли. Иными словами, конденсация инстантонов объясняет конфайнмент в компактной КЭД₃. Последний может интерпретироваться как дуальный эффект Мейснера в теории сверхпроводимости и сопровождается возникновением абрикосовских вихрей. При этом магнитный поток зажат в узкие трубки, соединяющие пары монополь–антимонополь. Другая интересная аналогия – с теорией сверхтекучести. Фаза конфайнмента соответствует нормальной фазе ${}^4\text{He}$ и имеет нулевую диэлектрическую проницаемость [17]. Идеи, родившиеся в рамках компактной КЭД₃, такие как учет монополей и инстантонов, в последующем сыграли значимую роль для поиска механизма конфайнмента в 4-мерной хромодинамике.

Первыми свидетельствами в пользу конфайнмента в КХД были рост бегущей константы связи на больших расстояниях, найденной

в первых порядках теории возмущений и наличие в теории серьезных инфракрасных расходимостей [20, 21]. Физическая картина, которую можно ассоциировать с линейно растущим потенциалом была предложена в работе [22]. Было предположено, что электрический поток между парой кварк–антикварк зажат в узкую трубку (струну), толщина которой в поперечном направлении не зависит от расстояния между кварками. Идея струнной модели в КХД выглядела привлекательно еще и из-за согласия спектра некоторых барионов с картиной траекторий Редже [23].

С. Мандельштам [24, 25] предложил модель вакуума как конденсата глюонов и легких кварк–антикварковых пар по аналогии с теорией сверхпроводимости, где конденсат электронных пар приводит к эффекту Мейснера – исключению магнитного потока из области. В неабелевой теории монополи существуют как естественные классические решения и не требуют явного введения на уровне элементарных частиц. В качестве примера теории, в которой известны монополярные решения, можно привести модель Джорджи–Глэшоу, где калибровочная симметрия нарушается до абелевой подгруппы с помощью механизма Хиггса [26]. На основании идей электрической–магнитной дуальности [27, 28] была дана классификация фаз $SU(2)$ калибровочной теории: пертурбативная; Джорджи–Глэшоу; фаза с полным спонтанным нарушением симметрии; фаза конфайнмента. В указанных выше работах получены свидетельства, что вариационная оценка энергии вакуума, содержащего газ монополей, меньше чем для пертурбативного вакуума. Тем не менее, монополярный подход столкнулся с рядом серьезных

технических проблем и работа в данном направлении продолжается как аналитически, так и с помощью численных методов на решетке (см. напр. [29, 30, 31]).

Близкий по духу подход основывается на том, что вакуум КХД является нестабильным относительно введения ненулевого среднего магнитного поля. Г. Саввиди [32, 33] вычислил поправку к энергии в однопетлевом приближении и нашел, что она имеет вид $\Delta E \propto -\mathcal{H}^2 \log \mathcal{H}$. Однако, сразу же возник вопрос о Лоренц инвариантности такого вакуума. Предпринимались значительные попытки усложнить структуру вакуума (периодическая структура, “спагетти” и т.д.), названного в последующем “копенгагенским”, и тем самым гарантировать Лоренц инвариантность [34, 35, 36, 37].

Отметим работу Ю.А. Симонова [38], в которой предполагается, что вакуум КХД содержит квазиклассические фоновые поля, но вместо явного указания полевых конфигураций делаются некоторые предположения о биллокальных корреляторах фоновых полей на больших расстояниях. Далее используется ковариантная калибровка Фока–Швингера для того, чтобы связать напряженности с калибровочными полями. Хотя такой подход является в какой-то мере феноменологическим, он воспроизводит разумные значения натяжения струны и величины конденсатов. Подход предлагаемый в диссертации, не смотря на отличия в большинстве технических деталей, разделяет с данным одну общую идею – для понимания конфайнмента удобнее работать с эффективным действием полей напряженностей, что особенно просто в калибровке Фока–Швингера (в нашем случае 3-х мерной).

Представлялось весьма заманчивым изучить влияние на конфайнмент инстантонов — классических решений теории Янга–Миллса с конечным евклидовым действием. Наиболее продвинутыми результатами в этом направлении, по-видимому, можно считать [39, 40, 41]. В четырех измерениях инстантоны зависят от размерного параметра λ . Если допустить, что он может быть произвольным, теория страдает от серьезных инфракрасных расходимостей. С другой стороны, показано, что явное введение обрезания ведет к короткодействию инстантонов и невозможности давать конфайнмент. Было предложено рассматривать плазму “меронов” — далекодействующих объектов, 3-х мерные сечения которые являются монополями, пара меронов при этом топологически эквивалентна инстантону. Возможность объяснения конфайнмента с помощью инстантонов в КХД подвергалась сомнению [42] и, видимо, хотя они и улучшают пертурбативный вакуум, инстантоны недостаточны для конфайнмента.

Интересный подход основан на попытке применения непертурбативного анзаца в уравнениях Швингера–Дайсона (Бете–Солпитера). Факт наличия конфайнмента безусловно имеет глубокие последствия на асимптотики функций Грина и их аналитическую структуру (см. напр. [46, 47, 48] и ссылки в них). Энергия взаимодействия статических кварков может быть представлена как фурье-образ временной компоненты глюонного пропагатора

$$E(R) \sim \int d\mathbf{k} \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{R}) \Delta_{00}(\mathbf{k}^2) \propto R^{\alpha-3}, \quad \Delta_{00}(\mathbf{k}^2) \propto k^{-\alpha}, \quad k \rightarrow 0.$$

Свободный пропагатор дает $\alpha = 2$ и, следовательно, закон Кулона.

Для конформизма необходима инфракрасная сингулярность пропагатора с $\alpha = 4$. В конечном порядке теории возмущений максимальная сингулярность, которой можно добиться — $k^2 \log k^2$. Вычисления работы [43] проводились в ковариантной калибровке, а работ [44, 45] — в аксиальной. Несмотря на некоторые различия в деталях, они основывались на транкировании уравнения Дайсона–Швингера и пренебрежении некоторыми членами. Численный анализ результирующих уравнения дал поощрительный результат, однако имелись определенные разногласия между схемами замыкания цепочки уравнений и разными калибровками, поэтому метод нельзя рассматривать как систематический.

Возможность работать непосредственно с петлей Вильсона $W[C]$ является преимуществом эффективных петлевых теорий выводимых из КХД [49]. Их идея основана на получении интегродифференциальных уравнений для $W[C]$ при изменении формы контура параметризуемого координатами $x_\mu(s)$ [50, 51]. Интерпретация в терминах струны дается с помощью приближенного уравнения типа

$$\frac{\delta^2 W[C[x(s)]]}{\delta x_\mu(s) \delta x^\mu(s)} = \chi^2 \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 W[C] + \dots$$

Заметим, что петлевой подход имеет дело с математически плохо определенными произведениями сингулярных операторов и поэтому плохо пригоден для развития последовательных вычислительных схем. Отметим альтернативный петлевой подход [52, 53], который может оказаться весьма перспективным в комбинации с $1/N$ разложением ($N \rightarrow \infty$, $g^2 N = \text{const}$), введенном в работах [54, 55].

Как мы уже говорили, из Вильсоновского критерия вообще говоря не следует конфайнмент глюонов. Более систематический подход к рассматриваемому явлению должен объяснять структуру пространства состояний системы, которое в фазе конфайнмента является подпространством, выделяемым некоторым дополнительным условием синглетности. Такое условие не может быть просто условием глобальной синглетности. Последнее не запрещает, например, состояние в котором кварк и антикварк разделены макроскопически большими расстояниями и могут поэтому отдельно наблюдаться. Попытка построения такой алгебраической теории конфайнмента была предпринята Т. Куго и И. Оджимой [56] на основе предложенной ими явно ковариантной операторной формулировки теории Янга–Миллса [57, 58] в рамках BRST формализма, который является естественным обобщением формализма Гупты–Блейлера в КЭД. Состояния физического пространства в их формализме зануляют генераторы BRST преобразований и масштабных преобразований духов, что обеспечивает в нем унитарность S -матрицы. Механизм конфайнмента, предложенный Куго и Оджимой получил название квартетного (в силу свойств преобразования асимптотических полей) и их критерий конфайнмента состоит из двух условий, обеспечивающих сокращение духовых степеней свободы. Физический смысл данных условий состоит в требовании отсутствия безмассовой одночастичной моды Намбу–Голдстоуна взаимодействующей с BRST-точным током. В случае выполнения этого критерия, цветной заряд может быть записан в BRST-точном виде. Тогда цветные асимптотические состояния не наблюдаемы

и могут существовать только в нефизическом или нулевой нормы секторах гильбертова пространства. Подобный формализм может быть продолжен на теорию при ненулевой температуре [59], но в некоторых работах появились утверждения о том, что его “кинематический” характер конфайнмента тривиален и сам формализм внутренне противоречив. Например в [60] утверждается, что не существует представлений расширенной BRST алгебры удовлетворяющей условиям Куго–Оджимы. Известно, что квартетный механизм сокращения хорошо работает в пертурбативной хиггсовской фазе [61], но он по-видимому не может рассматриваться как критерий конфайнмента.

Теория калибровочных полей на решетке [62, 63] оказалась наиболее мощным средством для изучения проблемы конфайнмента. Прежде всего, было обнаружено, что решеточная теория в приближении сильной связи дает закон площадей в Вильсоновской петле, т.е. обладает конфайнментом. Исследование этого приближения при ненулевой температуре показало, что цвет освобождается при высокой температуре, и что оба режима отделены фазовым переходом [16, 64]. Реальный интерес представляет континуальный предел решеточной теории, который должен осуществляться в окрестности нулевой константы связи. По этой причине приближение сильной связи не позволяет сделать заключения о непрерывной теории. Значительный прогресс при изучении решеточной теории при слабой связи сделан с помощью вычислений методом Монте Карло [65]. Он позволил с помощью применения ренормализационной группы оценить величины температуры фазового перехода

и натяжения струны в непрерывном пределе [66, 67, 68, 69]. В качестве параметра порядка в решеточной теории естественным образом выступает среднее линии Полякова,

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = \text{tr} \text{T-} \exp \left(\int_0^\beta dt A_0(t, \mathbf{x}) \right).$$

а коррелятор двух линий Полякова в разных точках позволяет найти корреляционную длину и следовательно определить род фазового перехода [70, 71]. Работы в данном направлении выявили важную роль глобальной группы Z_N центра $SU(N)$, роль которой была впервые осознана в подходе основанном на идеях дуальности. Существует простая связь фазового перехода конфайнмент–деконфайнмент с общей теорией критических явлений [72], который сопровождается спонтанным нарушением Z_N симметрии в фазе деконфайнмента. Найдено, что фазовый переход является переходом второго рода в $SU(2)$ и первого в $SU(3)$ калибровочных теориях [73, 69, 74, 75]. В настоящий момент данные результаты считаются твердо установленными в решеточной теории (см. напр. [76] для обзора современной ситуации), однако род фазового перехода может измениться в континуальном пределе. Основные усилия групп, проводящих сейчас расчеты на все более мощных суперкомпьютерах, сосредоточены на проблемах уже следующего порядка сложности — учета кварков и вычисления спектра связанных состояний теории.

Несмотря на поразительный прогресс в вычислительных методах, среди теоретиков все еще существует серьезная неудовлетворенность. Прежде всего до сих пор нет однозначной уверенности

сохранятся ли качественные свойства фазового перехода в непрерывном пределе (не говоря о количественных, хотя с применением разумных ренормализационных соотношений было найдено согласие некоторых характерных величин с известными экспериментальными значениями). Ситуация заметно улучшается с ростом точности, тем не менее, основная проблема состоит в том, что численные величины получаются без понимания физики явлений, и до сих пор ни одна из предложенных теоретических схем не смогла продемонстрировать свое полное согласие с решеточными данными или предсказать результат, который бы в последующем нашел хорошее подтверждение численно.

В силу этих причин, до настоящего момента предлагаются новые подходы к объяснению конфайнмента. По нашему мнению, весьма перспективным может оказаться вариационный подход общего вида. Основная трудность в нем состоит в правильном выборе пробного функционала и возможности точного вычисления средних с его весом. В работе [77] пробные состояния явно калибровочно инвариантны и сводятся к гауссовым при нулевой константе связи. Найдено, что минимум энергии достигается при значении вариационного параметра вдали от пертурбативного. Другая возможность [78] состоит в том, чтобы работать в терминах только физических степеней свободы и положительно определенного Гильбертова пространства, тем самым уменьшая произвол в выборе пробных функций и придавая законность стандартным вариационным неравенствам (Боголюбова-Гиббса, Фейнмана и т.д.).

В работе [79] подчеркивается важность явного разрешения Гаус-

совой связи для описания конфайнмента. Заметим, что способ разрешения связи (формализм без фиксации калибровки) и выбор переменных в данной работе отличается от используемого нами.

В качестве критики некоторых утверждений о тривиальности конфайнмента (например ввиду возможности работать полностью в терминах калибровочно-инвариантных объектов) [80, 81], и тем самым отсутствию проблемы, заметим, что они не объясняют по крайней мере два факта твердо установленные на решетке: линейный потенциал взаимодействия кварк-антикварк и отсутствие конфайнмента при высокой температуре.

В заключение обзора остановимся на механизме так называемой A_0 -конденсации. Хотя, на наш взгляд, он не привел к серьезным продвижениям и сама идеология этого подхода не вполне корректна, тем не менее основной объект его изучения совпадает с тем, что в нашем механизме конфайнмента является основной характеристикой фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент, а именно – эффективное действие временной компоненты калибровочного поля A_0 . Идея этого подхода состоит в том, чтобы объяснить ненулевое среднее линии Полякова в фазе деконфайнмента ненулевым средним A_0 , которому приписывается роль хиггсовского поля спонтанно нарушающего симметрию Z_N [82, 83]. Аналитические методы столкнулись с проблемой серьезных инфракрасных расходимостей, и существовала надежда, что ненулевое среднее этого поля может оказаться естественным инфракрасным регуляризатором [84, 85, 86, 87]. Результаты вычислений эффективного потенциала в первых петлях, проведенные в данных работах, обнаружили

ненулевое среднее в фазе деконфайнмента. В работе [88] делается утверждение об отсутствии калибровочной инвариантности результата и о том, что для эффективного действия, выраженного в терминах петли Полякова, конденсация отсутствует, что в свою очередь было подвергнуто критике в работе [89]. Для нашего изложения разрешения данного спорного вопроса не представляет прямого интереса. В любом случае, пертурбативный характер результата, отсутствие последовательного рассмотрения поверхностных членов и формальное обращение с инфракрасными расходимостями позволяют усомниться в ценности таких результатов. Как мы увидим далее, сам факт наличия ненулевого среднего A_0 для теории, которая корректно учитывает поверхностные члены, не означает наличие спонтанного нарушения, а наоборот соответствует фазе конфайнмента. Подчеркнем, что формальное пренебрежение поверхностными членами ведет к физически неправильным результатам и математически некорректным вычислениям, о чем вероятно сигнализируют встреченные проблемы. Работы по A_0 конденсации поэтому имеют для нас скорее образовательную ценность, чем практическую. В работе [84] и последующих за ней была дана интерпретация A_0 конденсата как мнимой части химического потенциала и было обнаружено, что вставка глобального синглетного проектора в след не изменяет величины стат. суммы. Механизм возникновения ненулевого среднего линии Полякова в фазе деконфайнмента в нашем подходе объясняется спонтанным нарушением Z_N симметрии поверхностным членом (который равен нулю в фазе конфайнмента).

Таким образом, развитие подхода, объясняющего фазовый переход конфайнмент–деконфайнмент в КХД из первых принципов, является важнейшей задачей теории неабелевых калибровочных полей. В качестве обоснования преимуществ нашего подхода отметим следующие обстоятельства. Наличие конфайнмента означает присутствие в системе дальнего действия, которое является источником линейно растущего потенциала. Причина этого явления в локальной теории хорошо понятна. Действительно, благодаря калибровочной инвариантности, система обладает Гауссовой связью. При выборе физической калибровки, она может быть разрешена, выражая вспомогательную компоненту электрического поля через физические компоненты полей в виде некоторого интегрального оператора. Подстановка последнего выражения в гамильтониан системы приводит к эффективному дальнему действию и нелокальности уравнений движения физических полей.

С другой стороны, нелокальность является источником граничной нетривиальности теории. Поверхностные члены, содержащие вспомогательную компоненту, перестают быть поверхностными после решения связи. Граничное условие на эту компоненту приобретает статус связи, так как оно требует обращения в нуль определенной интегральной конструкции от физических переменных. Поэтому возникает необходимость в развитии последовательной схемы учета поверхностных членов. Присутствие нефизических степеней свободы в ковариантной формулировке теории Янга–Миллса заметно усложняет анализ проблемы граничных условий благодаря вносимому ими дополнительному произволу. Представляется ра-

зумным работать в некоторой физической калибровке, обеспечивая тем самым положительную определенность гильбертова пространства состояний.

Известно, что ввиду безмассовости глюонов теория Янга–Миллса содержит серьезные инфракрасные расходимости. Для аккуратного обращения с ними на первом этапе необходимо ввести инфракрасную регуляризацию, которая удаляется в окончательном результате. Наиболее простой и физически наглядной является регуляризация системы с помощью заключения ее в конечную область. Заметим, что такая процедура всегда необходима для построения теории при конечной температуре, так как ввиду трансляционной инвариантности логарифм стат. суммы пропорционален объему пространства. Таким образом, мы естественно приходим к формулировке теории Янга–Миллса в конечной области с учетом нетривиальных значений тех переменных на границе, которые в бесконечном пределе должны породить ненулевые поверхностные члены.

Обобщенная калибровка Фока–Швингера выделена для анализа нашей проблемы благодаря ее следующим замечательным свойствам:

- 1) Гауссова связь может быть в ней разрешена в явном виде;
- 2) При согласовании вида калибровки с формой границы области происходит существенное упрощение структуры поверхностных членов;
- 3) В данной калибровке возможно связать калибровочное поле с полями напряженности с помощью линейного дифференциального

соотношения;

4) Ввиду перечисленных выше пунктов гамильтониан системы оказывается полиномом четвертой степени относительно канонических переменных;

5) Только продольные компоненты хромо- электрического и магнитного полей содержат неабелевы и нелокальные конструкции. Благодаря этому свойству функциональный интеграл легко переписывается в терминах всего двух коллективных переменных функционально сопряженных данным компонентам;

6) Приближение среднего поля является нетривиальным для коллективных переменных из-за квазиклассического характера фоновых полей напряженностей.

Несмотря на наличие в нашем механизме конфайнмента фонового постоянного магнитного поля при температуре ниже критической, это не создает проблем с инвариантностями так как, в пределе нулевой температуры среднее поле обращается в нуль и теория становится полностью Пуанкаре- и калибровочно- инвариантной. Действительно, вклад поверхностных членов приводит в фазе конфайнмента к вставке в средние инвариантного объекта — проектора группы больших калибровочных преобразований на бесконечности.

В качестве очевидных недостатков калибровки Фока–Швингера отметим, что нековариантный характер калибровки и наличие нелокальности приводят к существенному усложнению процедуры перенормировки. Эта проблема явится предметом последующих исследований и не обсуждается в диссертации. Мы обходимся без последовательной процедуры перенормировки, работая в тер-

минах ренорм-инвариантных переменных и фиксированного ультрафиолетового обрезания. Результат для наблюдаемой величины $\xi = T_c/\sqrt{\chi}$ оказывается конечным благодаря точному сокращению в нем расходимостей.

План диссертационной работы следующий.

В главе 2 вводятся обозначения, излагаются общие свойства и приводятся основные формулы обобщенной калибровки Фока–Швингера такие как: явное решения Гауссовой связи, линейные дифференциальные соотношения между различными переменными (например калибровочными полями и напряженностями), явные формулы связи с произвольной калибровкой и другие.

Глава 3 посвящена изложению гамильтонова формализма для теории Янга–Миллса в конечной области с учетом вклада поверхностных членов, детальному анализу уравнений движения, преобразований симметрии и проблемы выбора граничных условий.

В главе 4 приведен альтернативный подход к динамике теории Янга–Миллса в формализме переменных на бесконечности, изложение которого предваряется общими сведениями из алгебраической КТП. Показана эквивалентность данного формализма изложенному в главе 3, получена динамика на бесконечности.

В главе 5 изучается зависимость статистической суммы абелевой и неабелевой калибровочных теорий от переменной на границе $|\chi|$. Выводится формулировка теории в терминах коллективных переменных сопряженных продольным компонентам полей напряженностей. Вычисляется эффективное действие теории в приближении среднего поля для коллективных переменных и дается интерпрета-

ция фазового перехода конфайнмент–деконфайнмент.

В главе 6 показывается, что наш критерий конфайнмента удовлетворяет традиционным критериям: закон площадей в фазе конфайнмента и спонтанное нарушение Z_N симметрии в фазе деконфайнмента. Вычисляется отношение температуры фазового перехода к корню из коэффициента натяжения струны.

Основные результаты диссертации сформулированы в Заключение.

2. Некоторые свойства обобщенной калибровки Фока–Швингера

В данной главе мы рассмотрим процедуру фиксации обобщенной калибровки Фока–Швингера (ФШ) в теории Янга–Миллса, установим граничные условия на калибровочное поле, которые устраняют остаточные преобразования, получим ряд тождеств выражающих одни физические величины в данной калибровке через другие, а также изучим соотношения связывающие калибровки ФШ и Кулона.

Введем необходимые обозначения. Пусть \mathbf{x} – 3-мерный радиус вектор, $x = |\mathbf{x}|$ – его длина и $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x$ – единичный вектор в его направлении. Введем ортогональный проектор, а также продольные и поперечные компоненты векторов в \mathbf{R}^3

$$P = \mathbf{1} - \hat{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{a}_\perp = P\mathbf{a}, \quad \mathbf{a}_\parallel = (1 - P)\mathbf{a}. \quad (2.1)$$

Калибровкой Фока–Швингера называется условие вида

$$\hat{\mathbf{x}} \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \text{т.е. } \mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp. \quad (2.2)$$

Ковариантная 4-мерная версия данной калибровки $x_\mu A^\mu = 0$ была введена в классических работах [90, 91], и нашла многочисленные приложения в неабелевой калибровочной теории [92, 93]. В работе [94] было отмечено, что эта калибровка, наряду с весьма популярной аксиальной калибровкой, позволяет разрешить гауссову связь в явном виде, не содержит духовых полей, но в дополнение к тому, является инвариантной относительно пространственных

вращений, что существенно для проблемы анализа основных состояний теории. Однако, в литературе долгое время отсутствовало сколь либо последовательное исследование ее основных свойств. Анализ данной калибровки был проведен нами в работах [95, 96], а затем перенесен на обобщенную калибровку ФШ, которую мы сейчас введем, в работе [97].

Пусть V_R – регулярная область в \mathbf{R}^3 , топологически эквивалентная шару, с гладкой границей ∂V_R . Удобно выбрать такую криволинейную систему координат \mathbf{x} в области V_R , чтобы на поверхностях ∂V_R первая координата была постоянна и равна параметру R , который будет играть роль инфракрасного обрезания в нашем рассмотрении, т.е. $\partial V_R = \{\mathbf{x} : X_1(\mathbf{x}) = R = const\}$. Напомним, что координаты в декартовой системе мы обозначаем малыми буквами \mathbf{x} . Поле нормалей к границе, взятое в совокупности при всех значениях R , образует гладкое векторное поле во всей области.

Локальный ортонормированный криволинейный базис может быть представлен в виде

$$e_i^{(k)} = \frac{1}{h_k} \frac{\partial x_i}{\partial X_k}, \quad h_k = \left(\sum_{i=1}^3 \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_k} \right)^2 \right)^{1/2}, \quad h \equiv \prod_{i=1}^3 h_i. \quad (2.3)$$

Мы не делаем различия между нижними и верхними буквенными индексами и предполагаем суммирование по повторяющимся индексам, если не оговорено противное. Компоненты векторов в криволинейном базисе, чтобы отличать их от компонент в декартовом базисе, обозначаются буквами заключенными в скобки,

$$A_{(k)} = e_{(k)}^i A_i, \quad \partial_{(k)} \equiv \frac{1}{h_k} \frac{\partial}{\partial X_k}. \quad (2.4)$$

Вектор $\mathbf{e}_{(1)}$, очевидно, и задает описанное нами поле нормалей. Естественно ввести $(2+1)$ разложение компонент векторов на продольную и поперечные (обозначаемые греческими буквами): $i \rightarrow (1, \alpha)$, $\alpha = 2, 3$. В качестве векторной записи для “греческих” компонент криволинейных координат мы будем использовать обозначение $\check{\mathbf{X}} = (X_2, X_3)$.

Калибровочная теория в конечном области V_R принимает наиболее простой вид в специальной калибровке, вид которой согласован с формой границы. А именно, потребуем, чтобы компонента калибровочного поля в направлении поля нормалей равнялась нулю в каждой точке:

$$\mathbf{e}_{(1)}(\mathbf{x}) \mathbf{A}(t, \mathbf{x}) = 0, \quad \mathbf{A} = \mathbf{A}_\perp, \quad \mathbf{A}_\perp = P\mathbf{A}, \quad P = \mathbf{1} - \mathbf{e}_{(1)} \otimes \mathbf{e}_{(1)}. \quad (2.5)$$

Такая калибровка является естественным обобщением калибровки вида (2.2), и будет называться нами обобщенной калибровкой Фока–Швингера.

Замечательным свойством данной калибровки является тот факт, что гауссова связь

$$\nabla_i E_i = 0 \quad (2.6)$$

разрешается в ней в явном виде

$$E_{(1)} = -\frac{h_1}{h} \int_{X_1^{(0)}}^{X_1} dX'_1 (h\Phi_\perp)(X'_1, \check{\mathbf{X}}), \quad (2.7)$$

выражая продольную компоненту электрического поля через поперечную часть связи

$$\Phi_\perp \equiv \nabla_i E_{\perp i} = \frac{h_\alpha}{h} \nabla_{(\alpha)} \left(\frac{h}{h_\alpha} E_{(\alpha)} \right). \quad (2.8)$$

Нижний предел интегрирования $X_1^{(0)}$ равен некоторой константе, которую, как мы покажем ниже, целесообразно выбрать в точке соответствующей центру координат. При выводе (2.7) мы использовали явный вид дифференциального оператора $\partial \mathbf{e}_{(1)} = h^{-1} \partial_{(1)} h$ и то, что неабелева часть связи не содержит продольных компонент векторов в силу калибровочного условия.

В полной аналогии, можно разрешить тождество

$$\nabla_i G_i = 0, \quad G_i \equiv \nabla_j F_{ij}, \quad (2.9)$$

выразив $G_{(1)}$ через поперечные компоненты данного вектора,

$$G_{(1)} = -\frac{h_1}{h} \int_{X_1^{(0)}}^{X_1} dX'_1 (h \nabla_i G_{\perp i})(X'_1, \check{\mathbf{X}}). \quad (2.10)$$

Далее, одна из компонент тождеств Бианки записывается в виде

$$\nabla_i B_i = 0, \quad B_k = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} F_{ij}, \quad (2.11)$$

что аналогично позволяет выразить продольную компоненту магнитного поля

$$B_{(1)} = -\frac{h_1}{h} \int_{X_1^{(0)}}^{X_1} dX'_1 (h \nabla_i B_{\perp i})(X'_1, \check{\mathbf{X}}). \quad (2.12)$$

Можно показать, что остальные две компоненты тождеств Бианки

$$\epsilon_{ijk} e_{(\alpha)}^i \nabla_j E_k = 0 \quad (2.13)$$

эквивалентны тождествам

$$\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial X_1} (h_\alpha E_{(\alpha)}) = \nabla_{(\alpha)} (h_1 E_{(1)}), \quad (2.14)$$

связывающим поперечные компоненты электрического поля с ковариантной дивергенцией продольной. Весьма привлекательным свойством калибровки Фока–Швингера, благодаря которому ее ковариантная версия часто употреблялась, является тождество связывающее калибровочное поле с полем напряженности. Такое соотношение имеет место и в обобщенной калибровке ФШ. Оно является непосредственным следствием калибровочного условия и определения тензора напряженности [97]

$$\frac{1}{h_\alpha} \frac{\partial}{\partial X_1} (h_\alpha A_{(\alpha)}) = h_1 F_{(\alpha)(1)}. \quad (2.15)$$

Интегральная запись тождества

$$A_{(\alpha)} = \frac{1}{h_\alpha} \int_{\tilde{X}_1^{(0)}}^{X_1} dX'_1 (h_1 h_\alpha F_{(\alpha)(1)})(X'_1, \check{\mathbf{X}}), \quad (2.16)$$

как легко понять, нарушает симметрию относительно остаточных калибровочных преобразований допускаемых калибровочным условием (2.5). Выбор граничных условий в предыдущих интегральных соотношениях не отражается на остаточной симметрии, так как они связывают величины, которые преобразуются ею однородно.

Фиксация же некоторого граничного условия в (2.16) оказывается весьма жесткой. Выберем $\tilde{X}_1^{(0)} = x_1^0$ в точке начала координат \mathbf{x}^0 , т.е. наложим граничное условие вида

$$\lim_{X_1 \rightarrow x_1^0} (h_\alpha A_{(\alpha)})(\mathbf{X}) = 0. \quad (2.17)$$

Справедливо следующее

Утверждение. Для любого калибровочного поля существует единственный элемент группы калибровочных преобразований, переводящий его в поле удовлетворяющее условиям (2.5), (2.17), все решения которых связаны только однородными преобразованиями, т. е. эти условия обеспечивают выбор единственного элемента алгебры Ли в каждой калибровочной орбите.

Пусть $\tilde{\mathbf{A}}$ – произвольное калибровочное поле. Переход в обобщенную калибровку ФШ осуществляется с помощью калибровочного преобразования $U(\mathbf{X})$:

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}) = U^{-1}(\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{X}) - g^{-1}\partial)U(\mathbf{X}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{X}) = U^{-1}\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{X})U(\mathbf{X}), \quad (2.18)$$

которое может быть найдено как решение уравнения

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial}{\partial X_1} U(\mathbf{X}) = g(\mathbf{e}_{(1)} \tilde{\mathbf{A}})(\mathbf{X}) U(\mathbf{X}). \quad (2.19)$$

Начальное условие пока выберем наиболее простым образом

$U(X_1 = 0, \check{\mathbf{X}}) = 1$. Решением является Дайсоновская Р-экспонента

$$U(\mathbf{X}) = P \exp \int_0^1 d\alpha R(\alpha, \mathbf{X}), \quad R(\alpha, \mathbf{X}) = gX_1(h_1\mathbf{e}_{(1)}\tilde{\mathbf{A}})(\alpha X_1, \check{\mathbf{X}}). \quad (2.20)$$

Можно показать [96], что для компонент калибровочного поля формулы преобразования можно раскрыть в явном виде

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^b(\mathbf{X}) = & \tilde{\mathbf{A}}^a(\mathbf{X}) P \exp \int_0^1 d\alpha (-gt^{abc} R^c(\alpha, \mathbf{X})) - \\ & - g^{-1} \int_0^1 d\beta \partial R^a(\beta, \mathbf{X}) P \exp \int_0^\beta d\gamma (-gt^{abc} R^c(\gamma, \mathbf{X})). \end{aligned} \quad (2.21)$$

С помощью выбора остаточного преобразования можно удовлетворить необходимому граничному условию (2.17), которое играет

ключевую роль для доказательства единственности калибровочного поля. В самом деле, предположим существование двух различных полей \mathbf{A}' и \mathbf{A}'' удовлетворяющих (2.5),(2.17) и таких, что $\mathbf{A}'' \neq U^{-1}\mathbf{A}'U$, $\forall U = \text{const}$. Тогда должно существовать связывающее их калибровочное преобразование

$$\mathbf{A}''(\mathbf{X}) = U^{-1}(\mathbf{X}) (\mathbf{A}'(\mathbf{X}) - g^{-1}\partial) U(\mathbf{X}). \quad (2.22)$$

Умножение на $\mathbf{e}_{(1)}$ дает $\frac{1}{h_1} \frac{\partial U(\mathbf{X})}{\partial X_1} = 0$, т. е. $U = U(\check{\mathbf{X}})$. Совокупность преобразований данного вида образует группу остаточных калибровочных преобразований G_{res} калибровки ФШ. Граничное условие (2.17) запрещает такие преобразования. Действительно, в пределе $\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{x}^0$ в (2.22) калибровочное поле будет иметь сингулярность и мы приходим к противоречию с граничным условием, что и доказывает единственность.

В качестве простого примера рассмотрим эллиптические координаты $1 \leq X_1 < \infty$, $-1 \leq X_2 \leq 1$, $0 \leq X_3 \leq 2\pi$, где $X_3 = \phi$ - полярный угол, $X_1 = (r_1 + r_2)/2a$, $X_2 = (r_1 - r_2)/2a$. Такая система координат задается двумя точками, расположенными на расстоянии $\pm a$ от центра вдоль оси z , а \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 - радиус-векторы проведенные из этих точек в точку наблюдения. Начало координат находится в точке $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0$. Параметры Ламе в эллиптических координатах равны

$$h_1^2 = a^2 \frac{X_1^2 - X_2^2}{X_1^2 - 1}, \quad h_2^2 = a^2 \frac{X_1^2 - X_2^2}{1 - X_2^2}, \quad h_3^2 = a^2 (X_1^2 - 1)(1 - X_2^2). \quad (2.23)$$

В пределе $a = 0$ эллипсоидальная область переходит в шар, система координат - в сферические, а калибровка - в обычную калибровку

Фока–Швингера. В сферических координатах $X_1 = r$, $X_2 = \phi$, $X_3 = \theta$ параметры Ламе имеют особенно простой вид

$$h_1 = 1, \quad h_2 = X_1 \sin X_3, \quad h_3 = X_1. \quad (2.24)$$

Важным свойством сферической калибровки ФШ, которое заметно упрощает формулы, является то, что $\mathbf{e}_{(i)}$ не зависят от X_1 . Вектор нормали при этом равен единичному радиус–вектору $\mathbf{e}_{(1)} = \hat{\mathbf{x}}$.

В заключение, рассмотрим вопрос об эквивалентности калибровок Фока–Швингера и Кулона в абелевой теории в бесконечном объеме, а также установим явные формулы преобразования между ними. Введем продольные и поперечные компоненты векторов в импульсном пространстве, обозначаемые с помощью значков \perp , \parallel как верхних индексов векторов

$$Q = \mathbf{1} - \partial \otimes \Delta^{-1} \partial, \quad \mathbf{a}^\perp = Q \mathbf{a}, \quad \mathbf{a}^\parallel = (1 - Q) \mathbf{a}. \quad (2.25)$$

Под обратным оператором Лапласа здесь понимается интегральный оператор

$$[\Delta^{-1} \mathbf{f}](\mathbf{x}) = - \int d\mathbf{x}' (4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)^{-1} \mathbf{f}(\mathbf{x}'). \quad (2.26)$$

Калибровка Кулона

$$\partial \mathbf{A} = 0, \quad \text{т.е. } \mathbf{A} = \mathbf{A}^\perp \quad (2.27)$$

естественным образом выделена в абелевой теории в бесконечном объеме, так как ее переменные диагонализуют свободный гамильтониан. Введем следующие интегральные операторы в \mathbf{R}^3

$$[\mathbf{K} \mathbf{f}](\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \partial \int_0^x dy \hat{\mathbf{x}} \mathbf{f}(y \hat{\mathbf{x}}), \quad (2.28)$$

$$[\mathbf{G} \mathbf{f}](\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \hat{\mathbf{x}} x^{-2} \int_0^x y^2 dy [\partial \mathbf{f}](y \hat{\mathbf{x}}), \quad (2.29)$$

удовлетворяющие простой алгебре [96]

$$KP = P, \quad PK = K, \quad QK = Q, \quad KQ = K, \quad (2.30)$$

$$GP = G, \quad PG = P, \quad QG = G, \quad GQ = Q. \quad (2.31)$$

Пусть \mathcal{X}_{\parallel} , \mathcal{X}_{\perp} и \mathcal{X}^{\parallel} , \mathcal{X}^{\perp} обозначают продольные и ортогональные подпространства в \mathbf{R}^3 в смысле поперечности в координатном и импульсном пространствах. Рассмотрим гауссову связь при наличии внешней плотности заряда

$$\partial \mathbf{E} = \rho. \quad (2.32)$$

Полная напряженность является калибровочно-инвариантной в абелевом случае и выражается через соответствующие поперечные компоненты в обеих калибровках

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\perp} - \frac{\hat{\mathbf{x}}}{x^2} \int_0^x y^2 dy (\partial \mathbf{E}_{\perp} - \rho)(y \hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{E}^{\perp} + \partial \Delta^{-1} \rho. \quad (2.33)$$

В предположении граничных условий вида:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{x}) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 E^{\perp}(\mathbf{x}) = 0 \quad (2.34)$$

можно доказать, что отображения задаваемые операторами

$$\begin{aligned} K : \mathcal{X}^{\perp} &\rightarrow \mathcal{X}_{\perp}, & Q : \mathcal{X}_{\perp} &\rightarrow \mathcal{X}^{\perp} \\ P : \mathcal{X}^{\perp} &\rightarrow \mathcal{X}_{\perp}, & G : \mathcal{X}_{\perp} &\rightarrow \mathcal{X}^{\perp} \end{aligned}$$

являются взаимно-однозначными преобразованиями между переменными обеих калибровок

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{\perp} &= K \mathbf{A}^{\perp}, & \mathbf{A}^{\perp} &= Q \mathbf{A}_{\perp}, \\ \mathbf{E}_{\perp} &= P(\mathbf{E}^{\perp} + \partial \Delta^{-1} \rho), & \mathbf{E}^{\perp} &= G(\mathbf{E}_{\perp} - \partial \Delta^{-1} \rho). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Данные формулы связи для калибровочного поля следуют непосредственно из соотношений (2.18),(2.19) (или (2.33)) и аналогичных соотношений для перехода в калибровку Кулона, а для электрического поля из формулы (2.33). Функциональный якобиан перехода от одних переменных к другим не зависит от самих переменных и равен некоторой нормировочной константе $\mathcal{D}A_{\perp} \mathcal{D}E_{\perp} = N \mathcal{D}A^{\perp} \mathcal{D}E^{\perp}$ [96]. Используя алгебру операторов (2.30),(2.31) можно видеть, что данное преобразование является каноническим, т.е. оно сохраняет скобку Пуассона

$$\{ A_{\perp}^i(\mathbf{x}), E_{\perp}^j(\mathbf{y}) \} = (\text{KQP})_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = P_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}). \quad (2.36)$$

В Приложении А мы представляем формулу для пропагатора в калибровке ФШ, которая выводится с помощью использованных нами формул связи с переменными калибровки Кулона. Подчеркнем, что последние находятся в соответствии с переменными калибровки ФШ в ограничении на сектор с фиксированным граничным условием вида (2.34). Выбирая различный нижний предел в формуле (2.28) можно установить вид преобразования в произвольный сектор калибровки ФШ. Иными словами, формулировка теории в калибровке ФШ обладает дополнительной степенью свободы, нумерующей различные топологические секторы, которые преобразуются друг в друга действием элементов группы остаточной симметрии. Это обстоятельство не приводит к физическим последствиям в абелевой теории, где интеграл по орбитам данной группы дает лишь некоторый нормировочный множитель в функциональном интеграле, но может оказаться существенным в неабелевой.

3. Гамильтонов формализм для теории Янга–Миллса в конечной области

Стандартным предположением гамильтонова формализма в теории поля является отсутствие поверхностных членов, возникающих при интегрировании по частям. Для задач в конечной области это обеспечивается надлежащим выбором граничных условий, которым удовлетворяют поля на поверхности. В пределе бесконечного объема достаточно предполагать, что поля убывают достаточно быстро на пространственной бесконечности. Такие требования, безусловно, являются вполне оправданными для многих задач теории поля. Теория с калибровочной симметрией, однако, обладает рядом специфических свойств. Прежде всего, в своей ковариантной формулировке она содержит лишние (нефизические) степени свободы. Стандартные предположения о поведении этих компонент на бесконечности, строго говоря не очевидны. В самом деле, при выборе физической калибровки, лишняя компонента электрического поля после разрешения гауссовой связи выражается в виде объемного интеграла от физических переменных. Иными словами, *поверхностные члены превращаются в объемные*, и поэтому нет никаких оснований к пренебрежению ими. Граничное условие на такую переменную, следовательно, скорее имеет смысл дополнительной связи (связи на поверхности в исходной формулировке). Но как известно, связи требуют более аккуратного анализа. Поскольку, как правило, мы не в состоянии явно решить такую связь,

уравнения движения для физических переменных нужно выводить без ее использования, и лишь затем налагать ее на уравнения движения. Простой способ учета поверхностной связи состоит в том, чтобы добавить ее в гамильтониан с новым множителем Лагранжа.

Таким образом, возникает необходимость получать уравнения движения с учетом поверхностных членов, но кроме того, значения полей на границе должны фигурировать как равноправные гамильтоновы переменные. Более того, добавка поверхностного члена к гамильтониану, необходимая для учета поверхностной связи, приобретает значимый физический смысл. Эти черты теории выглядят достаточно необычно. Тем не менее, такой формализм может быть достаточно легко построен для теории Янга–Миллса, что и является основной целью данной главы.

С другой стороны, мы можем полностью избежать данных проблем, если будем работать с гамильтонианом после исключения нефизических переменных. Но в этом случае, он становится эффективно нелокальным выражением и теория содержит нелокальные далекодействующие взаимодействия. Гамильтонов формализм можно сделать хорошо определенным в традиционном смысле слова с помощью введения в гамильтониан гладкой функции обрезания с ограниченным носителем [98, 99, 100]. За счет этой функции все поверхностные члены обращаются в нуль, но в качестве платы – уравнения движения содержат зависимость от функции обрезания. В пределе, когда носитель функции становится бесконечным, уравнения движения локальных переменных все еще содержат плохо определенные делокализованные переменные. Таким образом, про-

блема учета бесконечности сохраняется, хотя и принимает несколько другой вид.

Второй из описанных подходов вполне осуществим для теории Янга–Миллса [95, 96] и рассматривается нами в следующей главе, но первый имеет перед ним явные преимущества в простоте и элегантности. Кроме того, система регуляризованная гладким обрезанием не имеет непосредственного физического смысла, в то время как задача о системе внутри конечной области достаточно естественна. В бесконечном пределе оба подхода, конечно, становятся эквивалентными, но сама процедура взятия предела представляет определенные трудности.

Задача учета границы в гамильтоновом формализме естественно возникает, например, при рассмотрении поверхностных волн в гидродинамике [101, 102, 103], где поверхностные члены имеют непосредственный физический смысл. В работе Редже и Тейтельбойма [104] было показано, что поверхностные члены могут играть существенную роль в теории гравитации, где этот вопрос до сих пор является предметом активного изучения [105, 106].

Для некоторого класса полевых моделей в работе [107] было предложено обобщение гамильтонова формализма, основная идея которого состоит в том, чтобы добавкой некоторых поверхностных членов модифицировать скобки Пуассона так, чтобы они строго (а не с точностью до поверхностных членов, как в традиционном формализме), удовлетворяли тождествам Якоби.

Мы ограничимся формулировкой для случая, когда гамильтониан системы содержит производные канонических переменных не

выше первого порядка. Рассмотрим класс локальных функционалов от канонических переменных вида

$$F = \int_V d\mathbf{x} f[\varphi^A; \varphi_{,i}^A]. \quad (3.1)$$

Пусть канонические переменные обладают канонической скобкой Пуассона

$$\{\varphi^A(\mathbf{x}), \varphi^B(\mathbf{x}')\} = I^{AB} \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}'), \quad (3.2)$$

где I^{AB} – стандартная симплектическая матрица со свойством: $I^2 = -1$, $I = const$. Вариация этого функционала при изменении канонических переменных может быть записана в виде

$$\delta F = \int_V d\mathbf{x} \left(\mathcal{E}_A(F) \delta\varphi^A + \partial_i(\mathcal{E}_A^i(F) \delta\varphi^A) \right), \quad (3.3)$$

где Эйлера производные нулевого и первого порядков равны соответственно

$$\mathcal{E}_A(F) = \frac{\partial f}{\partial \varphi^A} - \partial_i \frac{\partial f}{\partial \varphi_{,i}^A}, \quad \mathcal{E}_A^i(F) = \frac{\partial f}{\partial \varphi_{,i}^A}. \quad (3.4)$$

Определим скобку Пуассона двух произвольных функционалов F и H :

$$\begin{aligned} \{F, H\} = & \int_V d\mathbf{x} \left(\mathcal{E}_A(F) I^{AB} \mathcal{E}_B(H) \right. \\ & + \partial_i(\mathcal{E}_A^i(F) I^{AB} \mathcal{E}_B(H) + \mathcal{E}_A(F) I^{AB} \mathcal{E}_B^i(H)) \\ & \left. + \partial_i \partial_j (\mathcal{E}_A^i(F) I^{AB} \mathcal{E}_B^j(H)) \right). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Если H – гамильтониан системы, то временная эволюция функционала F задается дифференциальным уравнением

$$\dot{F} = \{F, H\}. \quad (3.6)$$

Данная скобка Пуассона обладает необходимыми свойствами антисимметричности, полноты и удовлетворяет тождествам Якоби [107]. Мы можем заметить, что уравнения движения вида (3.5),(3.6) с очевидностью следуют из вариационного принципа действия при учете поверхностных членов

$$S = \int_V d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi}^A I_{AB}^{-1} \varphi^B - h(\varphi^A; \varphi_{,i}^A) \right), \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \delta S = \int_V d\mathbf{x} \left(\dot{\varphi}^A I_{AB}^{-1} \delta\varphi^B - \mathcal{E}_B(H) \delta\varphi^B \right. \\ \left. - \partial_i(\mathcal{E}_B^i(H) \delta\varphi^B) \right). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Применим описанный формализм к теории Янга–Миллса. Рассмотрим гамильтониан системы в конечной области V

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_V = \int_V d\mathbf{x} \left(\frac{1}{2} (E_i^a)^2 + \frac{1}{4} (F_{ij}^a)^2 \right. \\ \left. - A_0^a (\partial_i E_i^a - g t^{abc} A_i^b E_i^c) \right). \end{aligned} \quad (3.9)$$

При проведении редукции системы к физическим переменным в обобщенной калибровке Фока–Швингера мы видели, что переменная $E_{(1)}$ не является независимой. Поэтому любое граничное условие на нее является дополнительной связью. Модифицируем гамильтониан $H_V = \mathcal{H}_V + \Delta H_V$ с помощью добавки поверхностного члена, содержащего эту связь с поверхностным множителем Лагранжа $A_0(R\hat{\mathbf{X}})$,

$$\Delta H_V = \int_{\partial V} d\check{\mathbf{X}} A_0^a \left(\frac{\hbar}{\hbar_1} E_{(1)}^a + \chi^a \right), \quad (3.10)$$

где $\chi = \chi(\check{\mathbf{X}})$ – произвольная функция задающая граничное условие, которую мы пока не конкретизируем. Отметим, что без до-

бавки этого поверхностного члена уравнения движения в конечной области не локализуемы.

Предполагая обычную каноническую скобку Пуассона $I_{A_i^a E_j^b} = \delta^{ab} \delta_{ij}$, легко получить следующие уравнения движения

$$\int_V d\mathbf{x} g_i^a \dot{A}_i^a = \int_V d\mathbf{x} g_i^a (E_i^a + \nabla_i A_0^a), \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \int_V d\mathbf{x} g_i^a \dot{E}_i^a &= \int_V d\mathbf{x} g_i^a (-g t^{abc} E_i^b A_0^c + \nabla_j F_{ij}^a) \\ &- \int_{\partial V} d\check{\mathbf{X}} g_{(\alpha)}^a \frac{h}{h_1} \left(\frac{1}{h_\alpha} \partial_{(1)}(h_\alpha A_{(\alpha)}^a) - \frac{1}{h_1} \partial_{(\alpha)}(h_1 A_{(1)}^a) \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

При выводе поверхностного члена мы использовали следующие тождества на производные от базисных векторов

$$e_j^{(k)} \partial_{(k)} e_j^{(\alpha)} = (1 - \delta^{k\alpha}) \frac{1}{h_k h_\alpha} \frac{\partial h_k}{\partial X_\alpha}, \quad (3.13)$$

$$e_j^{(\beta)} (\partial_{(\alpha)} e_j^{(1)} - \partial_{(1)} e_j^{(\alpha)}) = \delta^{\alpha\beta} \frac{1}{h_1 h_\alpha} \frac{\partial h_\alpha}{\partial X_1}. \quad (3.14)$$

Интегралы от пробных функций пока нельзя удалить, т.е. временная эволюция определена только для распределений. Уравнение движения для переменной канонически сопряженной к A_0 дает гауссову связь

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V d\mathbf{x} g^a \nabla_i E_i^a \\ &- \int_{\partial V} d\check{\mathbf{X}} g^a \left(\frac{h}{h_1} E_{(1)}^a + \chi^a \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

В силу независимости значений пробных функций внутри области и на границе, она распадается на два независимых условия

$$\nabla_i E_i^a = 0, \quad (3.16)$$

$$\frac{h}{h_1} E_{(1)}^a(R, \check{\mathbf{X}}) = -\chi^a(\check{\mathbf{X}}). \quad (3.17)$$

Теперь зафиксируем обобщенную калибровку Фока–Швингера (2.5).

Заметим, что уравнение (3.11) фактически является локальным, поэтому с ним можно обращаться как с уравнением для функции, а не распределением. Применим к обеим сторонам поперечной части уравнения операцию $\frac{1}{h_1 h_\alpha} \frac{\partial}{\partial X_1} h_\alpha$. С помощью тождеств (3.14) и соотношения, которое является продольной частью (3.11),

$$\frac{1}{h_1} \frac{\partial A_0^a}{\partial X_1} = -E_{(1)}^a \quad (3.18)$$

получим следующее уравнение движения

$$\dot{F}_{(\alpha)(1)}^a = -gt^{abc} F_{(\alpha)(1)}^b A_0^c, \quad (3.19)$$

где для более краткой записи мы использовали тождество (2.15). Аналогично, уравнение движения локально для продольной компоненты в (3.12) и мы получим

$$\dot{E}_{(1)}^a = -gt^{abc} E_{(1)}^b A_0^c + G_{(1)}^a. \quad (3.20)$$

С помощью несложных, но несколько громоздких выкладок, применяя (3.13), (3.14), можно доказать следующее тождество для продольной компоненты вектора $G_i = \nabla_j F_{ij}$,

$$G_{(1)} = -\frac{h_1 h_\alpha}{h} \nabla_{(\alpha)} \left(\frac{h}{h_1 h_\alpha} F_{(\alpha)(1)} \right). \quad (3.21)$$

Теперь мы готовы рассмотреть проблему выбора граничных условий. В соотношении (2.12), следующем из тождеств Бианки, а также соотношении, выражающем продольную компоненту электрического поля с помощью локальной гауссовой части (2.7), потребуем обычных условий регулярности полей в начале координат

\mathbf{x}^0 (т.е. выберем константу $X_1^{(0)} = x_1^0$):

$$\frac{h}{h_1} B_{(1)}(\mathbf{X}) \Big|_{X_1=x_1^0} = 0, \quad (3.22)$$

$$\frac{h}{h_1} E_{(1)}(\mathbf{X}) \Big|_{X_1=x_1^0} = 0, \quad (3.23)$$

В соотношение (2.10) на $G_{(1)}$, а также нелокальной части связи (3.17) выберем константу $\tilde{X}_1^{(0)} = R$, что дает граничные условия на поверхности:

$$\frac{h}{h_1} G_{(1)}(\mathbf{X}) \Big|_{X_1=R} = 0, \quad (3.24)$$

$$\frac{h}{h_1} E_{(1)}(\mathbf{X}) \Big|_{X_1=R} = -\chi(\check{\mathbf{X}}), \quad (3.25)$$

т.е. благодаря соотношению (3.21),

$$F_{(\alpha)(1)}(R, \check{\mathbf{X}}) = 0. \quad (3.26)$$

При таком граничном условии на $F_{(\alpha)(1)}$ уравнения движения для физических переменных (3.11), (3.12) становятся локальными. Множитель Лагранжа A_0 определяется из (3.18)

$$A_0(\mathbf{X}) = A_0(R, \check{\mathbf{X}}) - \int_R^{X_1} dX'_1 (h_1 E_{(1)})(X'_1, \check{\mathbf{X}}) \quad (3.27)$$

лишь с точностью до поверхностного множителя Лагранжа, который, вообще говоря, остается произвольным. Этот произвол отражает симметрию исходного действия относительно зависящих от времени калибровочных преобразований и аналогичен произволу в выборе A_0 в калибровке Кулона. Он фиксируется при задании граничных условий по времени, например периодических в статистической сумме при конечной температуре. Поэтому, в температурной теории, вообще говоря, нельзя обратить поверхностный

множитель Лагранжа в нуль выбором калибровочного преобразования, т.е. в такой теории содержится естественный параметр порядка $A_0(\check{\mathbf{X}})$. В нашем рассмотрении будет предполагаться лишь, что эта величина является некоторой постоянной во времени.

Из уравнений (3.19),(3.20) мы видим, что все граничные условия, кроме поверхностной связи, сохраняются во времени и, таким образом, являются допустимыми. Однако, из формулы (3.20) мы получим закон изменения $\chi(\check{\mathbf{X}})$ во времени

$$\dot{\chi}^a(\check{\mathbf{X}}) = gt^{abc} A_0^b(R, \check{\mathbf{X}}) \chi^c(\check{\mathbf{X}}). \quad (3.28)$$

При частном выборе оставшегося произвола, когда оба цветовых вектора $\chi(\check{\mathbf{X}})$ и $A_0(R, \check{\mathbf{X}})$ имеют одинаковое (противоположное) направление в начальный момент времени, χ является постоянной. В общем же случае, граничное условие не может быть фиксированным и меняется по формуле (3.28). Противоречие легко устраняется расширением фазового пространства системы. Предположим, что χ являются дополнительными гамильтоновыми переменными. Их скобки Пуассона с обычными переменными равны нулю, а между собой задаются канонической скобкой Пуассона [108]

$$\{\chi^a(\check{\mathbf{X}}), \chi^b(\check{\mathbf{X}}')\} = \omega^{ab}[\chi] \delta(\check{\mathbf{X}}, \check{\mathbf{X}}') \equiv gt^{abc} \chi^c(\check{\mathbf{X}}) \delta(\check{\mathbf{X}}, \check{\mathbf{X}}'). \quad (3.29)$$

Тогда для произвольных функционалов F, G скобка Пуассона равна

$$\{F, G\} = \int_{\partial V} d\check{\mathbf{X}} \omega^{ab}[\chi] \frac{\delta F}{\delta \chi^a(\check{\mathbf{X}})} \frac{\delta G}{\delta \chi^b(\check{\mathbf{X}})} \quad (3.30)$$

Тождество Якоби для таких скобок следует из тождества Якоби в алгебре Ли. Фазовым пространством Γ_χ данных переменных,

согласно симплектической конструкции Березина–Кириллова [108], являются орбиты коприсоединенного представления калибровочной группы $SU(N)$. На примере группы $SU(2)$ отметим, что симплектическими пространствами Γ_χ являются сферы радиуса $|\chi|$ в коприсоединенном представлении группы. Радиус же сферы является интегралом движения и представляет собой внешний параметр теории, так же как и частота вращений динамики на границе $|A_0(R, \check{\mathbf{X}})|$.

Симплектическая матрица ω^{ab} невырождена на орбитах, а дифференциальная форма вида $\Pi_{\check{\mathbf{X}}}(\omega^{-1})_{ab} d\chi^a(\check{\mathbf{X}}) \wedge d\chi^b(\check{\mathbf{X}})$ является симплектической матрицей инвариантной относительно гамильтонова фазового потока (теорема Лиувилля). Тогда уравнение (3.28) естественным образом совпадает с уравнением Гамильтона для данных переменных, и оно выражается через действие группы в коприсоединенном представлении. Полное фазовое пространство системы есть прямое произведение $\tilde{\Gamma} = \Gamma \times \Gamma_\chi$, где Γ – фазовое пространство локализованных переменных.

Система обладает остаточной инвариантностью относительно группы G_{res} остаточных калибровочных преобразований. Генераторами этих преобразований являются поверхностные интегралы

$$Q_V(g) = \int_{\partial V} d\check{\mathbf{X}} g^a(\check{\mathbf{X}}) \left(\left(\frac{\hbar}{\hbar_1} E_{(1)}^a \right) (R, \check{\mathbf{X}}) + \chi(\check{\mathbf{X}}) \right). \quad (3.31)$$

Действительно, они обладают алгеброй

$$\{Q_V(g), Q_V(g')\} = Q_V(-[g, g']), \quad (3.32)$$

где $[g, g']^a = g t^{abc} g^b g^c$ обозначает цветовой коммутатор. Скобка

Пуассона генераторов с гамильтонианом, как мы только что доказали, равна нулю

$$\{Q_V(g), H_V\} = 0. \quad (3.33)$$

Действие генераторов на калибровочное поле имеет вид

$$\{Q_V(g), A_{(\alpha)}(\mathbf{X})\} = \nabla_{(\alpha)} g(\check{\mathbf{X}}). \quad (3.34)$$

При каждом фиксированном $A_0(R, \check{\mathbf{X}})$ мы имеем некоторое представление динамики. Это представление, однако, не обладает фиксированным значением $\chi(\check{\mathbf{X}})$, которое эволюционирует во времени. Действие группы симметрии G_{res} переводит одно представление динамики в другое, меняя направление цветового вектора $A_0(R, \check{\mathbf{X}})$. Таким образом, минимальное представление гамильтоновой динамики, инвариантное относительно преобразований симметрии и временной эволюции, оказывается прямым интегралом всех возможных представлений с различными направлениями A_0 . Значения длин векторов χ и A_0 при этом фиксированы в каждом таком представлении и являются естественными параметрами порядка нумерующими неприводимые представления динамики.

В заключение этой главы рассмотрим выражение гамильтониана системы в терминах физических переменных

$$H_R = \frac{1}{2} \int_V d\mathbf{X} h(E_{(\alpha)}^2 + B_{(k)}^2) + \int_V d\mathbf{X} h \Phi_{\perp} \sigma + \int_{\partial V} d\check{\mathbf{X}} A_0(R, \check{\mathbf{X}}) \chi(\check{\mathbf{X}}), \quad (3.35)$$

$$\sigma(\mathbf{X}) = -A_0(R, \check{\mathbf{X}}) + \int_R^{X_1} dX'_1 (h_1 E_{(1)})(X'_1, \check{\mathbf{X}}), \quad (3.36)$$

где $E_{(1)}$ дается формулой (2.7). Переменная на границе $\sigma_R(\check{\mathbf{X}}) = -A_0(R, \check{\mathbf{X}})$ играет важную роль в последующих рассуждениях. Та-

кая запись полезна, поскольку она позволяет переписать объемную часть гамильтониана в виде локального выражения с помощью введения коллективной переменной σ .

4. Теория Янга–Миллса в формализме переменных на бесконечности

В предшествующих главах мы рассмотрели построение замкнутого гамильтонова формализма для теории Янга–Миллса в конечной области, допускающего нетривиальные значения переменных на границе. Фазовое пространство системы было расширено за счет введения дополнительных степеней свободы на границе. При этом скобку Пуассона было необходимо модифицировать добавлением некоторых поверхностных членов, так чтобы она по-прежнему удовлетворяла тождествам Якоби. Как было показано, введенная таким образом скобка Пуассона следует из вариационного принципа действия в конечной области, и поэтому определена однозначно.

Выбор поверхностной части самого гамильтониана диктовался требованием локализации динамики, и это требование удовлетворялось за счет наличия дополнительных поверхностных связей. Естественно ожидать, чтобы в бесконечном пределе динамика в конечной области стремилась к той же динамике, которая возникает в пределе формулировки системы с гладким обрезанием. Последняя регуляризация математически хорошо определена, единственна и не содержит дополнительных поверхностных степеней свободы.

Процедура взятия ее предела оказывается существенно нетривиальной для систем с дальнодействием и должна осуществляться в слабой топологии, т.е. со ссылкой на некоторый узкий класс допустимых физических состояний.

Математически строгой основой настоящего рассмотрения явится формализм переменных на бесконечности, предложенный Моркио и Строкки в рамках алгебраической КТП [98, 99, 100], формулировку которого мы предварим некоторыми определениями и результатами математического характера [109, 110], необходимыми для понимания существа предмета.

4.1. Некоторые сведения из формализма переменных на бесконечности

В контексте алгебраической КТП наблюдаемым соответствуют самосопряженные элементы C^* алгебры \mathcal{R} (комплексной банаховой алгебры с инволюцией и свойством $\|R\|^2 = \|R^*R\| \quad \forall R \in \mathcal{R}$), а состояниям — положительные ($\phi(A^*A) \geq 0$) линейные функционалы ϕ над ней, т.е. элементы дуального пространства \mathcal{R}^* . В КТП обычно применяется квазилокальная алгебра $\mathcal{A} = \overline{\bigcup_{V \in \mathfrak{S}} \mathcal{A}^V}$ определяемая как C^* -индуктивный предел алгебр \mathcal{A}^V ассоциированных с конечными областями из набора $\mathfrak{S} = \{V : V \in \mathbf{R}^3\}$. Динамика — это однопараметрическая группа α_V^t автоморфизмов \mathcal{A} , генерируемая обрезанным гамильтонианом $H_V \in \mathcal{A}$:

$$\alpha_V^t[A] \equiv e^{itH_V} A e^{-itH_V}, \quad \forall A \in \mathcal{A}. \quad (4.1)$$

Любая C^* алгебра может рассматриваться как W^* алгебра (алгебра фон Неймана) \mathcal{N} , являющаяся подалгеброй алгебры $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ всех ограниченных операторов в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H} и такая, что $\mathcal{N}'' = \mathcal{N}$. Здесь штрих соответствует взятию коммутанта \mathcal{N} , т. е. множества всех операторов из $\mathcal{B}(\mathcal{H})$, коммутирующих со всеми элементами \mathcal{N} .

Существует каноническая конструкция GNS (Гельфанда – Наймарка–Сигала) для построения векторного представления π_φ алгебры \mathcal{R} , сопоставляемого любому состоянию $\varphi \in \mathcal{R}^*$ в некотором гильбертовом пространстве \mathcal{H}_φ . При этом вектор $\Phi \in \mathcal{H}_\varphi$ ассоциированный с φ и определенный как $\langle \varphi, R \rangle = (\Phi, \pi_\varphi(R)\Phi) \quad \forall R \in \mathcal{A}$ оказывается циклическим в этом представлении. Универсальное представление $\pi_u = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}^*} \pi_\varphi$ — это прямая сумма GNS представлений в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_u = \bigoplus_{\varphi \in \mathcal{R}^*} \mathcal{H}_\varphi$ по всем состояниям над алгеброй.

Универсальная алгебра фон Неймана $\mathcal{R}'' \equiv \pi_u(\mathcal{R})''$, наделенная сильной топологией, является банахово дуальным пространством к множеству \mathcal{F} , называемому преддуальным, и образующим замкнутое подпространство в $(\mathcal{R}'')^*$. Элементы \mathcal{F} , называемые нормальными состояниями над \mathcal{R}'' , по-другому могут быть еще охарактеризованы как матрицы плотности, т. е.

$$\exists \rho \in \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\rho) < \infty, \quad \langle \varphi, A \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}}(\rho A) \quad \forall A \in \mathcal{R}''.$$

Два представления π_1 и π_2 C^* алгебры \mathcal{R} квазиэквивалентны (будем записывать это как $\pi_1 \approx \pi_2$), если любое состояние $\omega \in \mathcal{R}^*$

представимое как нормальное на $\pi_1(\mathcal{R})''$:

$$\exists \rho \in \pi_1(\mathcal{R})'' \text{ со свойством } \langle \omega, A \rangle = \text{Tr}_{\mathcal{H}_1}(\rho A) \quad \forall A \in \mathcal{R},$$

так же нормально представимо на $\pi_2(\mathcal{R})''$ и наоборот. Проще говоря, представления $\pi_1 \approx \pi_2$, если они имеют одинаковый набор состояний алгебры, допускающих матрицу плотности на своих бикоммутантах.

Примарное (факторное) представление — это представление, квазиэквивалентное неприводимому. Примарные представления далее будут играть важную роль благодаря следующему их свойству. Центр $\mathcal{Z}_\pi = \pi(\mathcal{R})' \cap \pi(\mathcal{R})$ любого примарного представления π тривиален и имеет вид $\mathcal{Z}_\pi = \{\lambda \mathbf{1}, \lambda \in \mathbf{C}\}$. Аналогичное свойство имеется и у неприводимых представлений, но они в отличие от примарных обязаны быть ассоциированы с чистыми состояниями.

Мы будем рассматривать системы с дальнодействием, для которых предел динамики (4.1) при $V \rightarrow \infty$ не существует в топологии нормы. В этом случае динамика в бесконечном объеме может быть построена с помощью конструкции Моркио и Строкки [28-31].

Пусть \mathcal{F} некоторый класс состояний из \mathcal{A}^* , удовлетворяющих свойствам:

- i) \mathcal{F} замкнут относительно линейных операций;
- ii) \mathcal{F} замкнут по норме и отделим: из $\phi(A) = 0 \quad \forall \phi \in \mathcal{F} \Rightarrow A = 0$;
- iii) Из $\phi \in \mathcal{F} \Rightarrow \phi_{AB}(\cdot) \equiv \phi(A \cdot B) \in \mathcal{F} \quad \forall A, B \in \mathcal{A}$.

Обозначим $w_{\mathcal{F}}$ слабую топологию, определенную \mathcal{F} на \mathcal{A}'' , и пусть \mathcal{M} расширение \mathcal{A} в $w_{\mathcal{F}}$ -топологии¹

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{M} \subset \mathcal{A}''.$$

В абстрактных терминах W^* -алгебра \mathcal{M} является дуальной к банахову пространству \mathcal{F} . Тогда существуют слабые пределы

$$w_{\mathcal{F}}\text{-}\lim_{V \rightarrow \infty} \alpha_V^t[A] \equiv \alpha^t[A] \in \mathcal{M} \quad \forall A \in \mathcal{A} \quad (4.2)$$

и α^t может быть продолжена до однопараметрической группы автоморфизмов \mathcal{M} [99, 100].

Динамическая система — это тройка $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \alpha^t)$. Важно отметить, что в присутствие дальнедействующих взаимодействий алгебраическая динамика может быть определена только на алгебре \mathcal{M} с нетривиальным центром $\mathcal{Z} = \mathcal{M} \cap (\cap_V \mathcal{A}')$, генерируемым переменными на бесконечности.

Будем говорить, что факторное представление π связанное с состоянием из \mathcal{F} и стабильное относительно α^t , ведет к эффективной локализации динамики, если существует подалгебра эффективной локализации $\mathcal{A}_l \subset \mathcal{M}$ со свойством

- i) \mathcal{A}_l точно представима в π ;
- ii) \mathcal{A}_l слабо плотна в \mathcal{M} ;
- iii) существуют автоморфизмы α_{π}^t \mathcal{A}_l такие, что

$$\forall \phi \in \pi : \phi(\alpha^t[A]) = \phi(\alpha_{\pi}^t[A]) \quad \forall A \in \mathcal{A}_l.$$

¹ \mathcal{A}'' как банахово пространство изоморфна дважды дуальной \mathcal{A}^{**} .

Отсюда следует тривиальность центра \mathcal{A}_l и отсутствие в ней делокализованных переменных.

Симметрия системы $(\mathcal{M}, \mathcal{F}, \alpha^t)$ естественно определена как группа β^s автоморфизмов \mathcal{M} , полученная продолжением с \mathcal{A} и коммутирующая с динамикой² $\beta^s \alpha^t = \alpha^t \beta^s$. Из физических соображений, казалось бы, вполне достаточно ограничиться представлением эффективной локализации и динамикой α_π^t . Однако наличие симметрии β^s привносит дополнительные сложности, так как она не коммутирует с α_π^t , хотя коммутирует с алгебраической динамикой. В типичных примерах оказывается, что α_π^t не оставляет инвариантными представления вида $\pi_{(\beta^s)^*} \phi$. Поэтому приходится рассматривать набор состояний $\mathcal{S} = \{ \phi^s = (\beta^s)^* \phi \}$, который уже стабилен под действием $(\alpha_\pi^t)^*$, и ввести представление $\Pi_{\mathcal{S}}$ являющееся прямой суммой всех представлений \mathcal{A}_l полученных GNS конструкцией исходя из состояний ϕ_s .

Представление $\Pi_{\mathcal{S}}$ приводимо и имеет нетривиальный центр $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$, генерируемый переменными на бесконечности. Динамика α_π^t однозначно продолжается до действия на $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$, нетривиальный вид которой приводит к некоторым интересным физическим эффектам. Отметим также, что именно динамика α_π^t возникает в контексте рассмотрения приводимого представления $\Pi_{\mathcal{S}}$.

Поясним необходимость введения подобных математических структур. Если взаимодействие убывает на бесконечности недостаточно быстро, не существует предел по норме динамики при

²Для этого достаточно ее коммутирования с динамикой при конечном обрезании.

снятии конечного обрезания. Это ведет к тому, что производная динамики по времени, т. е. уравнения движения локальных наблюдаемых, символически записываемые в виде

$$\frac{d}{dt} \alpha_R^t[\varphi(x)] = F[\varphi(x), \varphi_R], \quad \varphi(x) \in \mathcal{A} \quad (4.3)$$

содержат в пределе $R \rightarrow \infty$ делокализованные переменные φ_R . Например:

1° $\varphi_R = - \int_0^\infty dx f_R'(x) \varphi(x)$, где $f_R(x)$ гладкая функция вида

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & x \leq R' \\ 0, & x \geq R'' \end{cases} \quad \begin{matrix} R' = (1 - \varepsilon)R \\ R'' = (1 + \varepsilon)R. \end{matrix} \quad (4.4)$$

Такие переменные возникают в теоретико-полевых моделях.

2° $\varphi_V = \frac{1}{V} \int_V dx \varphi(x)$ — эргодические средние. Этот пример типичен для моделей в приближении среднего поля, когда подобные конструкции могут присутствовать непосредственно в гамильтониане H_V .

Пределы этих переменных, очевидно, хорошо определены в слабом смысле. Пусть ϕ_λ такое состояние, что $\langle \phi, \varphi(x) \rangle = \lambda$. Тогда

$$w\text{-}\lim_R \varphi_R \equiv \lim_R \langle \phi^\lambda, \varphi_R \rangle = - \int_0^\infty dx f_R'(x) \lambda = \lambda,$$

и аналогично для φ_V . Поэтому слабый предел динамики $w\text{-}\lim_R \alpha_R^t \equiv \alpha^t$ существует.

Динамика α_π^t представления эффективной локализации переменной на бесконечности, соответствующая некоторой наблюдаемой,

содержит в себе важную информацию о спектральных свойствах теории и связана согласно обобщенной теореме Голдстоуна [98] со спектром коммутатора генератора симметрии с рассматриваемой наблюдаемой. Для нахождения динамики на бесконечности, вообще говоря, необходимо решить полную динамическую задачу. Пусть $\{\varphi^i(x)\}$ набор локальных переменных теории, а $\{\varphi^A\}$ переменные из этого набора, для которых в уравнениях движения

$$\frac{d}{dt}\alpha_R^t[\varphi^i(x)] = F^i[\varphi^j(x), \varphi_R^A] \quad (4.5)$$

содержатся делокализованные вклады. Необходимо ввести в рассмотрение набор переменных на бесконечности φ_∞^A и набор примарных состояний $\{\phi_\lambda\}$ таких, что $(\alpha_\pi^t)^*\phi_\lambda = \phi_{\lambda(t)}$ содержится в этом наборе, каждое из которых обладает свойством

$$\langle \phi_\lambda, \varphi^A(x) \rangle = \lambda^A. \quad (4.6)$$

По определению, чтобы получить $\alpha_\pi^t[\varphi_\infty]$ необходимо, решив (4.5) найти $\alpha_R^t[\varphi^A]$, рассмотреть вакуумное состояние ϕ_{λ_0} , циклическое для представления π , и вычислить динамику $\alpha_\pi^t[\varphi_\infty]$ в зависимости от начального условия $\varphi_\infty(t=0) = \lambda$

$$\alpha_\pi^t[\varphi_\infty]^a[\lambda] = \lambda^a(t) = \lim_{R' \rightarrow \infty} \lim_{R \rightarrow \infty} \langle \phi_{\lambda_0}, \beta_{R'}^\lambda \alpha_R^t[\varphi^A(x)] \rangle. \quad (4.7)$$

К сожалению, этот путь удается пройти целиком только в точно решаемых моделях. Рассмотрим уравнение движения (4.5), снимем в нем обрезание в слабой топологии представления π , ассоциированного с вектором ϕ_{λ_0} . При этом будем иметь

$$\frac{d}{dt}\alpha_\pi^t[\varphi^i(x)] = F^i[\varphi^j(x), \lambda_0^A]. \quad (4.8)$$

Последнее уравнение обладает свойством

$$\langle \phi_{\lambda_0}, \frac{d}{dt} \alpha_\pi^t[\varphi^A(x)] \rangle = 0 \quad (4.9)$$

отражающим стабильность $\pi : (\alpha_\pi^t)^* \phi_{\lambda_0} = \phi_{\lambda_0}$. Для этого функционал F должен иметь специальный вид, например

$$F^A[\varphi^i(x), \lambda_0^B] = F^A[\varphi^B(x) - \lambda_0^B].$$

Однако, для ϕ_λ ($\lambda \neq \lambda_0$) будем иметь

$$0 \neq \frac{d}{dt} \langle (\alpha_\pi^t)^* \phi_\lambda, \varphi^A(x) \rangle = \langle \phi_\lambda, F^A[\varphi^i(x), \lambda_0^B] \rangle. \quad (4.10)$$

Замкнутое уравнение, очевидно, получится, если F^A линейна по $\{\varphi^B\}$ и не зависит от $\{\varphi^i, i \neq B\}$.

Часто можно ограничиться приближением Хартри–Фока. Пусть динамика имеет вид (4.8), тогда в таком приближении

$$\frac{d}{dt} \alpha_\pi^t[\varphi_\infty^A] = F^A[\varphi_\infty^B, \lambda_0^B]. \quad (4.11)$$

Можно обобщить всю конструкцию, заменив определение состояний (4.6) условием

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \langle \phi_\lambda, \varphi^A(x) \rangle = \lambda^A \quad (4.12)$$

на случай, когда состояния с $\lambda \neq \lambda_0$ не трансляционно-инвариантны $(\alpha^{\mathbf{x}})^* \phi^\lambda \neq \phi^\lambda$. Правая часть (4.10) может упрощаться в пределе $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ за счет свойств кластерности (ослабления корреляций) по отношению к трансляциям вида

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi_\lambda(\alpha^{\mathbf{x}}[A] \alpha^{\mathbf{x}}[B]) = \lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \left(\phi_\lambda(\alpha^{\mathbf{x}}[A]) \phi_\lambda(\alpha^{\mathbf{x}}[B]) \right). \quad (4.13)$$

Перейдем теперь к вопросу о состоянии равновесия для систем с нетривиальной динамикой переменных на бесконечности. Хорошо известно, что след матрицы плотности трансляционно-инвариантных систем не существует, так как его логарифм пропорционален объему пространства. Поэтому сперва вычисляют средние и прочие термодинамические характеристики с помощью локальных состояний Гиббса, ω_β^V ,

$$\begin{aligned}\omega_\beta^V(A) &= \text{Tr}(\rho_\beta^V A), & \rho_\beta^V &= Z_{\beta V}^{-1} e^{-\beta H_V}, \\ Z_{\beta V} &= \text{Tr} e^{-\beta H_V}.\end{aligned}\tag{4.14}$$

а затем переходят к термодинамическому пределу устремляя V и, если необходимо, другие параметры к бесконечности. При конечном V след может вычисляться по различным пространствам унитарно-эквивалентных представлений алгебры перестановочных соотношений, которые при $V \rightarrow \infty$ становятся унитарно-неэквивалентными и дают различные ответы.

Идея алгебраического подхода к построению состояния равновесия системы состоит в установлении связи с ее динамикой. Если динамика определена как группа автоморфизмов α^t алгебры наблюдаемых \mathcal{A} , рассмотрим уравнение на состояние $\omega_\beta \in \mathcal{A}^*$

$$\omega_\beta(A \alpha^t[B]) \Big|_{t=i\beta} = \omega_\beta(B A), \quad \forall A, B \in \mathcal{A},\tag{4.15}$$

называемое условием KMS. Заметим прежде всего, что это условие тривиально удовлетворяется для локальных состояний Гиббса (4.14). В известных случаях, когда существует разумный способ вычисления термодинамического предела и получается впол-

не определенное предельное состояние, оно удовлетворяет условию KMS относительно предельной динамики [110, 111]. Кроме того, состояния KMS при достаточно слабых дополнительных условиях обладают рядом замечательных свойств, позволяющих строить их разложения по более простым состояниям KMS. Состояния KMS, которые не допускают дальнейшего разложения, называются экстремальными и интерпретируются как чистые термодинамические фазы.

Итак, предположим, что существует состояние $\langle \dots \rangle_\beta \in \mathcal{M}^*$, удовлетворяющее условию KMS относительно динамики α^t как автоморфизмов \mathcal{M} . Для такого состояния существует теорема о центральном разложении на бесконечности:

$$\langle w A \rangle_\beta = \int_{\aleph} \mu_\beta(d\lambda) (\lambda, w)_\beta \langle \lambda, A \rangle_\beta, \quad \forall A \in \mathcal{A}, \quad w \in \mathcal{Z}(\mathcal{A}''). \quad (4.16)$$

Она утверждает существование центральной меры μ_β , сосредоточенной на множестве \aleph всех примарных KMS состояний, осуществляющей разложение средних $\langle \dots \rangle_\beta$ от любого элемента бикоммутанта алгебры вида wA на произведение среднего $\langle \lambda, A \rangle_\beta$ от $A \in \mathcal{A}$ по примарному KMS состоянию на некоторый функционал элемента центра бикоммутанта (λ, w) .

В любом примарном состоянии KMS переменные на бесконечности фиксированы на своих ожиданиях. Для того чтобы удовлетворить условию KMS, мера μ_β должна обладать определенными свойствами инвариантности. Состояния $\langle \lambda, \cdot \rangle_\beta$, как обычно, можно получать в виде предела локальных состояний Гиббса:

$$\langle \lambda, A \rangle_\beta = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{Tr}_{\mathcal{H}_\lambda}(\rho_{\beta R} A), \quad (4.17)$$

где след вычисляется по пространству характеризуемому фиксированным значением среднего λ . Необходимым условием того, чтобы состояние было KMS, является условие его t -инвариантности

$$\omega_\beta(\alpha^t[A]) = \omega_\beta(A), \quad (4.18)$$

которому необходимо удовлетворить. Имеем

$$\langle \lambda, \alpha^t[A] \rangle_\beta = \langle (\alpha_\pi^t)^* \lambda, A \rangle_\beta. \quad (4.19)$$

Мера μ_β должна быть устроена так, чтобы скомпенсировать зависимость от времени состояний (4.19). Функционал (λ, \cdot) нормирован на единицу и его явный вид нас не интересует, когда вычисляется среднее от локальных операторов. Если динамика переменных на бесконечности $(\alpha_\pi^t)^*[\lambda_\infty]$ гамильтонова, то существует мера Лиувилля их фазового пространства, $(d\lambda)$, сохраняемая гамильтоновым фазовым потоком. Тогда состояния вида

$$\omega_\beta(A) = \int (d\lambda) \langle \lambda, A \rangle_\beta \quad (4.20)$$

с $\langle \lambda, A \rangle_\beta$ определяемыми с помощью термодинамического предела локальных состояний Гиббса (4.17) t -инвариантны. Последнее разложение означает, что фактически состояние равновесие определено с помощью приводимого представления Π_S и интеграл по $(d\lambda)$ учитывает динамику на бесконечности. Аналогичным образом можно продемонстрировать, что состояния (4.20) удовлетворяют и непосредственно условию KMS.

4.2. Динамика на бесконечности в теории Янга-Миллса

Эволюция α_R^t для системы Янга-Миллса в калибровке Фока-Швингера генерируется обрезанным гамильтонианом вида

$$H_R = \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} f_R(x) [\mathbf{E}_\perp^2 + E_\parallel^2 + \frac{1}{2} F_{ij}^2], \quad (4.21)$$

где E_\parallel дается формулой (2.7), а гладкая функция $f_R(x)$ удовлетворяет свойствам (4.4). Канонический коммутатор задается формулой

$$\begin{aligned} [A_\perp(g_1), E_\perp(g_2)] &= i(g_1, g_2), \\ (g_1, g_2) &= \int d\mathbf{x} g_{(1)i}^a(\mathbf{x}) P_{ij}(\hat{\mathbf{x}}) g_{(2)j}^a(\mathbf{x}), \quad g_{(A)} \in \mathcal{G}(\mathbf{R}^3) \quad (A = 1, 2) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Так как поверхностные члены теперь обращаются в нуль за счет функции обрезания, из (4.21) непосредственно следуют уравнения движения $\mathbf{A}_\perp(t) = \alpha_R^t[\mathbf{A}_\perp]$, $\mathbf{E}_\perp(t) = \alpha_R^t[\mathbf{E}_\perp]$:

$$\dot{A}_{\perp k}^a = f_R E_{\perp k}^a - P_{kl} \nabla_l \tilde{\sigma}_R^a, \quad (4.23)$$

$$\dot{E}_{\perp k}^a = g t^{abc} E_k^{\perp b} \tilde{\sigma}_R^c - P_{kl} \nabla_l f_R F_{il}^a, \quad (4.24)$$

$$\tilde{\sigma}_R^a(\mathbf{x}) = \int_x^\infty dy f_R(y) \frac{1}{y^2} \int_0^y z^2 dz \Phi_\perp^a(z\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.25)$$

Легко проверить следующее коммутационное соотношение

$$[\Phi_\perp^a(\mathbf{x}), \Phi_\perp^b(\mathbf{x}')] = -i g t^{abc} \Phi_\perp^c(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (4.26)$$

при выводе которого было учтено тождество $\nabla_i \nabla_j F_{ij} = 0$. Вычислим теперь производную по времени $\dot{\Phi}_\perp$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi}_\perp^a(\mathbf{x}) &= \frac{g}{2} t^{abc} [\Phi_\perp^b(\mathbf{x}), \int_0^\infty y^2 dy \Phi_\perp^c(y\hat{\mathbf{x}})]_+ \int_{\max(x,y)}^\infty \frac{dz}{z^2} f_R(z) \\ &+ \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} (x^2 f_R(x) \hat{x}_j \nabla_i F_{ij}^a). \end{aligned} \quad (4.27)$$

Поэтому интеграл с произвольной функцией от сферических угловых координат ς будет иметь нулевую производную по времени

$$[H_R, \Phi_{\perp}(\varsigma)] = 0 \quad \forall \varsigma(\hat{\mathbf{x}}), \quad \Phi_{\perp}(\varsigma) \equiv \int d\mathbf{x} \Phi_{\perp}^a(\mathbf{x}) \varsigma^a(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.28)$$

Следовательно, $\Phi_{\perp}(\varsigma)$ генерируют группу G_{res} остаточных калибровочных преобразований β^{ς} , коммутирующих с обрезанной динамикой $\alpha_R^t \beta^{\varsigma} = \beta^{\varsigma} \alpha_R^t$, а их действие на калибровочное поле имеет вид

$$-i [\Phi_{\perp}(\varsigma), \mathbf{A}_{\perp}^a(\mathbf{x})] = \nabla \varsigma^a(\hat{\mathbf{x}}) \quad \forall \varsigma^a(\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.29)$$

Из формулы (4.27) после интегрирования по частям следует уравнение движения для переменной $\tilde{\sigma}_R$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\sigma}}_R^a(\mathbf{x}) &= -\frac{g}{2} t^{abc} \int_x^{\infty} dy [\tilde{\sigma}_R^{b'}(y\hat{\mathbf{x}}), \tilde{\sigma}_R^c(y\hat{\mathbf{x}})]_+ \\ &+ \int_x^{\infty} dy f_R^2(y) \hat{x}_j \nabla_i F_{ij}^a(y\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (4.30)$$

Квазилокальная алгебра \mathcal{A}_l порождается полями \mathbf{A}_{\perp} , \mathbf{E}_{\perp} , но уравнения движения кроме того содержат составную переменную, которую перепишем как,

$$\tilde{\sigma}_R^a(\mathbf{x}) = f_R(\mathbf{x}) \sigma^a(\mathbf{x}) - \sigma_R^a(\mathbf{x}), \quad \sigma_R^a = -\int_x^{\infty} dy f_R'(y) \sigma^a(y\hat{\mathbf{x}}), \quad (4.31)$$

$$\sigma^a = -(\Delta_x^{-1} \Phi^a)(\mathbf{x}) = \int_x^{\infty} \frac{dy}{y^2} \int_0^y z^2 dz \Phi_{\perp}^a(z\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.32)$$

В пределе $R \rightarrow \infty$ конструкция σ_R^a будет содержать все более локализованные вклады за счет носителя функции $\text{supp } f_R'(y) = [R', R'']$. Представление алгебры π_{σ} фиксируется требованием, чтобы поле $\sigma(\mathbf{x})$ имело в нем среднее значение

$$\phi_{\sigma}(\sigma^a(\mathbf{x})) = \phi_{\sigma}(\alpha^t[\sigma^a(\mathbf{x})]) = \sigma^a$$

постоянное во времени. Для \mathbf{R}^3 -трансляционно инвариантных состояний σ^a должно быть константой.

Введем минимальный набор \mathcal{S} примарных состояний над \mathcal{A}_l содержащий $\phi_{\sigma\hat{\eta}}$ ($\sigma = \sigma\hat{\eta}$) и стабильный относительно $(\alpha_\pi^t)^*$, $(\beta^s)^*$. Обозначим через $\Pi_{\mathcal{S}}$ представление \mathcal{A}_l , даваемое прямой суммой всех представлений из \mathcal{S} , а через $\mathcal{Z}_{\mathcal{S}}$ — центр $\Pi_{\mathcal{S}}(\mathcal{A}_l'')$. Здесь

$$\mathcal{S} = \{ \phi_{\sigma_\infty(\hat{\mathbf{x}})}, \forall \sigma_\infty(\hat{\mathbf{x}}) \}$$

с произвольной функцией $\sigma_\infty(\hat{\mathbf{x}})$ принимающей значения в $Lie - G_{res}$. Алгебра \mathcal{A}_l предполагается слабо асимптотически абелевой по отношению к трансляциям в представлении π

$$w\text{-}\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \pi([\alpha^{\mathbf{x}}[A], B]) = 0, \quad \forall A, B \in \mathcal{A}_l. \quad (4.33)$$

Тогда переменные на бесконечности

$$\sigma_\infty^a(\hat{\mathbf{x}}) = -w\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty dy f_R' \sigma^a(y\hat{\mathbf{x}})$$

существуют в слабой топологии $\Pi_{\mathcal{S}}$ при трансляционной инвариантности состояния ϕ :

$$\pi(\sigma_\infty) = \lim_{R \rightarrow \infty} \phi(\alpha_{R\hat{\mathbf{x}}}[\sigma]) = \phi(\sigma) = \sigma, \quad (4.34)$$

а также $\forall A \in \mathcal{A}_l$

$$[\sigma_\infty^a(\hat{\mathbf{x}}), A] = -w\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^\infty dy f_R'(y) \int_0^\infty \frac{z^2 dz}{\max(y, z)} [\Phi_\perp^a(z\hat{\mathbf{x}}), A] = 0. \quad (4.35)$$

Последнее соотношение справедливо благодаря конечной области интегрирования в силу (4.33) и, кроме того, и свойства носителя

$\text{supp } f_R'$. Следовательно, переменные на бесконечности принадлежат центру $\sigma_\infty(\hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{Z}_S$. Симметрия β^ζ коммутирует с гамильтонианом и действует на переменные на бесконечности по коприсоединенному представлению Ad^*

$$-i [\Phi_\perp(\zeta), \sigma_\infty^a] = gt^{abc} \zeta^b(\hat{\mathbf{x}}) \sigma_\infty^c(\hat{\mathbf{x}}). \quad (4.36)$$

Эффективная локализованная динамика α_π^t представления π имеет вид

$$A_{\perp k}^{\dot{a}} = E_{\perp k}^a - P_{kl} \nabla_l (\sigma - \pi(\sigma_\infty))^a, \quad (4.37)$$

$$\dot{E}_{\perp k}^a = gt^{abc} E_{\perp k}^b (\sigma - \pi(\sigma_\infty))^c - P_{kl} \nabla_i F_{il}^a, \quad (4.38)$$

и из (4.30) следует

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}^a(\mathbf{x}) &= gt^{abc} \pi(\sigma_\infty)^b \sigma^c - \frac{g}{2} t^{abc} \int_x^\infty dy [\sigma^{b'}(y\hat{\mathbf{x}}), \sigma^c(y\hat{\mathbf{x}})]_+ \\ &+ \int_x^\infty dy \hat{x}_j \nabla_i F_{ij}^a(y\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned} \quad (4.39)$$

Заметим однако, что из (4.27) следует уравнение движения для заряда $Q_\infty^a(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \int_0^\infty y^2 dy \Phi_\perp^a(y\hat{\mathbf{x}})$, которое говорит о некоммутативности динамики α_π^t и преобразований симметрии,

$$\dot{Q}_\infty^a(\hat{\mathbf{x}}) = gt^{abc} Q_\infty^b(\hat{\mathbf{x}}) (\sigma_\infty^c - \pi(\sigma_\infty)^c). \quad (4.40)$$

Мы использовали предположение, что переменная на бесконечности, соответствующая переменной $x^2 \hat{x}_j \nabla_i F_{ij}$, равна нулю, что аналогично условию (3.24) в формализме с граничными членами. Уравнение (4.40) является аналогом (3.28) и естественно потребовать, чтобы выполнялась связь, $Q_\infty = -\chi$, где χ — некоторая дополнительная переменная на бесконечности. Это достигается аналогичной добавкой поверхностного члена вида (3.10), где $\tilde{\sigma}_R$ играет

роль $A_0(\hat{\mathbf{x}})$. При любом конечном R такой член равен нулю, тем не менее предельное выражение в слабой топологии конечно. Данные свойства отсутствия слабой непрерывности типичны для теорий с дальнедействиями и могут быть охарактеризованы как бифуркация бесконечной динамической системы [98]. В примарном представлении π переменная на бесконечности $\chi(\hat{\mathbf{x}})$ фиксирована на своем ожидании, цветовое направление которого должно совпадать с $\pi(\sigma_\infty)$. Динамика α_π^t на бесконечности получится из (4.40) вычислением предела $x \rightarrow \infty$ средних по состояниям $\phi_{\vec{\sigma}_\infty(\hat{\mathbf{x}})}(\cdot) = \langle \vec{\sigma}_\infty(\hat{\mathbf{x}}), \cdot \rangle$ характеризующимся свойством

$$\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \infty} \phi_{\vec{\sigma}_\infty(\hat{\mathbf{x}})}(\vec{\sigma}(\mathbf{x})) = \vec{\sigma}_\infty(\hat{\mathbf{x}}) \quad (4.41)$$

В приближении Хартри–Фока, означающем условие кластерности (ослабления корреляций) вида (4.13) и оно равно нулю. Окончательно записываем

$$\dot{\sigma}_\infty^a(\hat{\mathbf{x}}) = -gt^{abc} \sigma_\infty^b(\hat{\mathbf{x}}) \pi(\sigma_\infty)^c, \quad \sigma_\infty^a(\hat{\mathbf{x}}) \in \mathcal{Z}_S, \quad (4.42)$$

что есть уравнение цветовых вращений вокруг вектора $\pi(\sigma_\infty)$.

В заключение данного раздела подчеркнем, что формализм переменных на бесконечности приводит к аналогичным физическим заключениям, что и гамильтонов формализм с поверхностными членами в бесконечном пределе. По этой причине, мы далее будем свободно использовать оба термина “переменные на бесконечности” и “переменные на границе” как эквивалентные, подразумевая что они фигурируют в несколько различных математических контекстах.

4.3. Алгебра Пуанкаре в калибровке Фока–Швингера

К очевидным недостаткам калибровки Фока–Швингера следует отнести отсутствие явной Пуанкаре- и даже \mathbf{R}^3 - трансляционной ковариантности. Это, в свою очередь, затрудняет процедуру перенормировки. Тем не менее, теория по-прежнему обладает пространственно–временными симметриями, хотя этот факт не столь очевиден, как в ковариантных калибровках. Наличие данных симметрий системы Янга–Миллса означает существование операторов $Q_R^A \in \mathcal{A}_l$, генерирующих преобразования симметрии

$$\alpha^q[A] = w\text{-}\lim_{R \rightarrow \infty} e^{iQ_R q} A e^{-iQ_R q}, \quad A \in \mathcal{A}_l.$$

На формальном уровне существование алгебры Пуанкаре в физических калибровках было продемонстрировано в работе [112]. Там было показано, что операторы

$$\begin{aligned} P_0 = H &= \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), & P_i &= \int d\mathbf{x} T_{0i}, \\ M_{ij} &= \int d\mathbf{x} (x_i T_{0j} - x_j T_{0i} + E_i^a A_j^a - E_j^a A_i^a), \\ M_{0i} &= t P_i - \frac{1}{2} \int d\mathbf{x} x_i (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), & T_{0i} &= -\mathbf{E}^a \partial_i \mathbf{A}^a, \end{aligned} \quad (4.43)$$

суженные на поверхности связи и калибровочного условия, удовлетворяют коммутационным соотношениям группы Пуанкаре.

Наличие переменных на бесконечности в калибровке ФШ ведет к дополнительным сложностям. Поэтому необходимо удостовериться в том, что трансляционная \mathbf{R}^3 инвариантность по-прежнему существует, так как ее наличие необходимо для последовательной фор-

мулировки теории. Отметим, что в калибровке Фока–Швингера можно записать

$$P_i = - \int d\mathbf{x} \mathbf{E}_\perp^a \partial_i \mathbf{A}_\perp^a, \quad (4.44)$$

а $P_0 = H$, где H — гамильтониан системы.

Чтобы придать операторам P_μ смысл нужно ввести инфракрасную регуляризацию с помощью функции $f_R(x)$. Для функций $f_R(x)$ зависящей только от радиуса, оказывается, коммутационные соотношения будут выполняться в слабом смысле

$$\lim_{R, R' \rightarrow \infty} \phi([P_\mu^R, P_\nu^{R'}]) = 0, \quad \forall \phi \in \pi.$$

Для коммутатора пространственных компонент импульса друг с другом эта формула проверяется тривиально. Гораздо интереснее рассмотреть коммутатор $[H, P_i]$. Начнем со случая QED, когда переменные на бесконечности отсутствуют в уравнениях движения. Как указывалось в главе 2, физические величины в калибровке ФШ могут быть переписаны в терминах диагонализующих кулоновских переменных. При этом используются алгебраические свойства (2.30, 2.31) операторов перехода и производится интегрирование по частям, которое допустимо из-за наличия сферически симметричной функции обрезания. Оказывается, что в пределе снятого обрезания

$$P_i^{FS} = P_i^{Cuol},$$

так же как это происходит для гамильтониана (3).

Теперь перейдем к случаю полей Янга–Миллса. Записываем

ожидание коммутатора в виде

$$\lim_{R, R'} i \phi([H_{R'}, P_i^R]) = \lim_{R, R'} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(\alpha_{R'}^t [P_i^R]) = \lim_R \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi(\alpha_\pi^t [P_i^R]),$$

$P_i^R \in \mathcal{A}_l$. Все что нам необходимо — это производная $\frac{d}{dt} \alpha_\pi^t$, которую вычисляем с помощью (4.37, 4.38). Она состоит из локальной части и вклада содержащего $\pi(\sigma_\infty)$. После простых, но несколько длинных преобразований первое слагаемое может быть записано в виде интеграла от градиента скалярной четной функции, который поэтому зануляется. Оставшаяся конструкция

$$\delta \left(\frac{d}{dt} \alpha_\pi^t [\mathbf{E}^a \partial_i \mathbf{A}^a] \right) = E_k^a \nabla_k \partial_i \pi(\sigma_\infty), \quad (4.45)$$

очевидно, равна нулю тогда и только тогда, когда $\pi(\sigma_\infty)$ является константой. Это необходимое и достаточное условие, чтобы динамика, зависящая от представления не нарушала трансляционной инвариантности $\alpha_\pi^t \alpha^x = \alpha^x \alpha_\pi^t$ в рассматриваемом представлении π .

5. Зависимость статистической суммы от переменных на границе

В данной главе мы изучим зависимость статистической суммы абелевой и неабелевой калибровочных теорий от величины переменной на границе $|\chi(\hat{\mathbf{x}})|$ [113]. В рамках гамильтонова формализма главы 3 мы установили, что поверхностный множитель Лагранжа — $A_0(R\hat{\mathbf{x}})$ не определяется из уравнений движения. Функциональный интеграл включает все его возможные значения. Действие

системы без поверхностного члена инвариантно относительно зависящих от времени калибровочных преобразований. При учете ненулевого поверхностного члена с $|\chi|$, эта инвариантность отсутствует. Направление вектора χ , как мы показали, должно рассматриваться как гамильтонова переменная и обладает нетривиальной динамикой (3.28). При этом его длина фиксирована и играет роль внешнего параметра характеризующего различные фазы системы.

В теории при конечной температуре возможность зависящих от времени калибровочных преобразований кроме того ограничена требованием сохранения периодических граничных условий по времени для калибровочных полей, что будет обсуждаться нами в главе 6. Вопрос о физически осуществимых значениях $|\chi|$ при конечной температуре сводится к нахождению наиболее статистически вероятных значений, на которых стат. сумма максимальна, а при нулевой температуре – вакуумных значений, на которых минимальна энергия.

5.1. Электродинамика с внешним зарядом

Мы начнем изучение с простого случая допускающего явное решение – электродинамики с внешней плотностью заряда. Будем работать в калибровке Кулона. Заметим, что из соотношений (2.33) и (2.35) следует выражение комбинации $\hat{\mathbf{x}}E^{\parallel}(R\hat{\mathbf{x}}) + \chi(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ через физические поперечные переменные калибровки Кулона

$$R^2 \hat{\mathbf{x}}E^{\parallel}(R\hat{\mathbf{x}}) - \int_0^R y^2 dy \rho(y\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\Delta} \int_0^R (R - y) dy \hat{\mathbf{x}}\mathbf{E}^{\perp}(y\hat{\mathbf{x}}), \quad (5.1)$$

где мы использовали обозначение для сферической части Лапласиана $\Delta = x^{-1}\partial_x^2 x + x^{-2}\hat{\Delta}$.

Статистическая сумма теории в сферической области может быть представлена в виде следующего функционального интеграла

$$Z = \int \mathcal{D}\mathbf{A}\mathcal{D}\mathbf{E} \delta(\partial\mathbf{A})\delta(R^2 E_{\parallel}(R\hat{\mathbf{x}}) + \chi(\hat{\mathbf{x}})) \exp \int_{\Lambda} d^4x \left(i\mathbf{E}\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{A}\Delta\mathbf{A} - \frac{1}{2\epsilon^2}(\partial\mathbf{E} - \rho)^2 \right), \quad (5.2)$$

где было введено обозначение $\Lambda = [0, \beta] \times V$ (мы также будем пользоваться записью $\partial\Lambda = [0, \beta] \times \partial V$.) Гауссова связь регуляризована с помощью малого параметра ϵ , который нужно положить нулю в конце вычислений. Данный гауссов интеграл вычисляется стандартным образом с помощью сдвига переменных интегрирования. Для вычисления интеграла по \mathbf{E} , введем новую переменную интегрирования, \mathbf{E}_1 ,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathcal{E}, \quad \mathbf{E}_1(R\hat{\mathbf{x}}) = 0. \quad (5.3)$$

Здесь новая переменная \mathbf{E}_1 удовлетворяет нулевому граничному условию и \mathcal{E} выбрано так, чтобы отсутствовал линейный член по \mathbf{E}_1 . Это дает следующее уравнение для определения \mathcal{E}

$$i\dot{\mathbf{A}} - \mathcal{E} + \frac{1}{\epsilon^2}\partial(\partial\mathcal{E}) - \frac{1}{\epsilon^2}\partial\rho = 0, \quad (5.4)$$

$$R^2\hat{\mathbf{x}}\mathcal{E}(R\hat{\mathbf{x}}) + \chi(\hat{\mathbf{x}}) = 0. \quad (5.5)$$

Последнее граничное условие следует из второй дельта-функции в (5.2). Можно разложить данный вектор на продольную и поперечную компоненты в импульсном пространстве $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{\perp} - \partial\varphi$. Тогда

поперечная часть равна $\mathcal{E}^\perp = i\dot{\mathbf{A}}$, и уравнение для φ принимает вид

$$(\Delta - \epsilon^2)\varphi = -\rho, \quad (5.6)$$

$$R^2 \frac{\partial \varphi}{\partial R} = \chi(\hat{\mathbf{x}}). \quad (5.7)$$

Стат. сумма (5.2) может быть представлена в виде произведения

$$\begin{aligned} Z &= Z_1 \tilde{Z}, \\ Z_1 &= \int \mathcal{D}\mathbf{A}^\perp \mathcal{D}\mathbf{E} \exp \int_\Lambda d^4x \left(-\frac{1}{2} \dot{\mathbf{A}}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{A} \Delta \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{E}_1^2 - \frac{1}{2\epsilon^2} (\partial \mathbf{E}_1)^2 \right), \\ \tilde{Z} &= \exp \beta \left(-\frac{1}{2} \int_{\partial V} d\hat{\mathbf{x}} \chi(\hat{\mathbf{x}}) \varphi(R\hat{\mathbf{x}}) - \frac{1}{2} \int_{\partial V} d\mathbf{x} \rho(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \right), \end{aligned} \quad (5.8)$$

где φ – это решение (5.6,5.7).

Решение (5.6,5.7), очевидно, является суммой однородной части, ϕ , удовлетворяющей нетривиальному граничному условию, и неоднородной части удовлетворяющей нулевому граничному условию

$$\varphi = \phi - G \bullet \rho \quad G = (\Delta - \epsilon^2)^{-1}, \quad (5.9)$$

где G – функция Грина с нулевым граничным условием Неймана.

Введем следующие обозначения

$$\begin{aligned} \tilde{Z} &= \tilde{Z}_\chi \tilde{Z}_{\rho\rho} \tilde{Z}_{\rho\chi}, \\ \tilde{Z}_\chi &= \exp \left(-\frac{\beta}{2} \int_{\partial V} d\hat{\mathbf{x}} \chi(\hat{\mathbf{x}}) \phi(\hat{\mathbf{x}}) \right), \\ \tilde{Z}_{\rho\rho} &= \exp \left(\frac{\beta}{2} \int_{\partial V} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \rho(\mathbf{x}) G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \rho(\mathbf{y}) \right), \\ \tilde{Z}_{\rho\chi} &= \exp \left(-\frac{\beta}{2} \int_{\partial V} d\mathbf{x} \phi(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}) \right) \exp \left(\frac{\beta}{2} \int_{\partial V} d\hat{\mathbf{x}} \chi(\hat{\mathbf{x}}) (G \bullet \rho)(\hat{\mathbf{x}}) \right). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Естественно рассмотреть данную проблему в терминах сферических координат. Решение (5.6) регулярное внутри сферы дается

формулой

$$\phi_{lm} = C_{lm} \sqrt{\frac{\pi}{2\epsilon r}} I_{l+1/2}(\epsilon r) \quad (5.11)$$

$$I_{n-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} z^n \left(\frac{1}{z} \frac{d}{dz} \right)^n \cosh z. \quad (5.12)$$

Постоянная C_{lm} при этом определяется уравнением (5.7). Роль регуляризатора теперь ϵ становится понятной. Решением для нулевой моды будет

$$\phi_{00} = C_{00} \frac{\sinh \epsilon r}{\epsilon r}, \quad C_{00} = \frac{\chi_{00}}{R^2 \epsilon (\cosh \epsilon R / \epsilon R - \sinh \epsilon R / (\epsilon R)^2)}, \quad (5.13)$$

и оно имеет $1/\epsilon^2$ сингулярность при стремлении ϵ к нулю. В то же время, решения для других мод регулярны в этом пределе и стремятся к

$$\phi_{lm} = C_{lm} r^l, \quad C_{lm} = \frac{\chi_{lm}}{l R^{l+1}}. \quad (5.14)$$

В рассмотрении нулевой моды необходимо соблюдать большую аккуратность и удерживать конечное ϵ . Функция Грина для нулевой моды определяется как решение уравнений

$$\left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r - \epsilon^2 \right) G_{00}(r, r') = \frac{\delta(r - r')}{r r'}, \quad (5.15)$$

$$\frac{\partial G_{00}(r, r')}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0 \quad (5.16)$$

и легко может быть вычислена в явном виде

$$\begin{aligned} G_{00}(r, r') &= \frac{1}{\epsilon r r'} \left(\frac{1}{2} \sinh \epsilon |r - r'| - \frac{1}{2} \sinh \epsilon (r + r') \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sinh \epsilon R - \cosh \epsilon R / \epsilon R}{\cosh \epsilon R - \sinh \epsilon R / \epsilon R} \sinh \epsilon r \sinh \epsilon r' \right). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Лидирующие члены в разложении Лорана при малом ϵ имеют вид

$$G_{00}(r, r') \simeq -\frac{3}{\epsilon^2 R^3} + \frac{9}{5R} - \frac{1}{2} \frac{r^2 + r'^2}{R^3} - \frac{1}{\max(r, r')}, \quad (5.18)$$

$$\phi_{00} \simeq \left(\frac{3}{\epsilon^2 R^3} - \frac{3}{10R} + \frac{r^2}{2R^3} \right) \chi_{00}. \quad (5.19)$$

Подстановка этих выражений в формулы (5.10) дает для ненулевых мод в пределе $\epsilon = 0$

$$\tilde{Z}_{\chi_{l>0}} = \exp \left(-\frac{\beta}{2R} \sum_{lm>0} \frac{|\chi_{lm}|^2}{l} \right). \quad (5.20)$$

Для простоты будем предполагать, что распределение заряда ρ является сферически симметричным. В этом случае оно дает вклад только в нулевую моду. Введем обозначения для интегралов

$$\mathcal{Q}_{00} = \int_0^R r^2 dr \rho_{00}(r), \quad (5.21)$$

$$\mathcal{G}_{00} = \int_0^R r^4 dr \rho_{00}(r). \quad (5.22)$$

Тогда результат можно представить в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{00} = & \exp \beta \left(-\frac{1}{2} \int_0^R x^2 dx y^2 dy \frac{\rho_{00}(x) \rho_{00}(y)}{\max(x, y)} - \frac{3}{2\epsilon^2 R^3} (\mathcal{Q}_{00} + \chi_{00})^2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{R} \left(\frac{9}{10} \mathcal{Q}_{00}^2 - \frac{1}{10} \chi_{00}^2 + \frac{3}{10} \chi_{00} \mathcal{Q}_{00} \right) - \frac{1}{2R^3} (\mathcal{Q}_{00} + \chi_{00}) \mathcal{G}_{00} \right). \end{aligned} \quad (5.23)$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ это выражение будет содержать дельта-функцию от условия $\mathcal{Q}_{00} + \chi_{00} = 0$, и мы приходим к следующей поправке к стандартному ответу

$$\tilde{Z}_{00} = \exp \left(\frac{\beta}{2R} \mathcal{Q}_{00}^2 \right) \delta(\mathcal{Q}_{00} + \chi_{00}). \quad (5.24)$$

В качестве простой иллюстрации полученного результата рассмотрим плотность заряда $\rho_{00} = -\kappa/(\sqrt{\pi} r)$ соответствующую линейно растущему потенциалу $\varphi = \kappa r$. Для такого экзотического

распределения заряда, моделирующего конфайнментный потенциал, мы получим дополнительный константный вклад в плотность свободной энергии

$$\Delta\mathcal{F} = -\frac{\log Z}{\beta V} = -\frac{3}{32\pi^2}\kappa^2. \quad (5.25)$$

Интересно подчеркнуть, что его возникновение полностью обязано граничным членам, и эта добавка уменьшает свободную энергию. Этот пример намечает возможную связь между явлением конфайнмента в неабелевой калибровочной теории и граничными эффектами.

5.2. Формулировка в терминах коллективной переменной

Рассмотрим несколько отличную формулировку данной проблемы с помощью введения коллективной переменной, σ , сопряженной к гауссовой связи. Обе формулировки эквивалентны в абелевой теории, где переход от одной к другой осуществляется тривиальной заменой переменных интегрирования. Новая формулировка оказывается более плодотворной в неабелевой теории. Перепишем формулу (5.2) в терминах коллективной переменной σ , вводимой с помощью определения

$$\exp\left(-\frac{1}{2\epsilon^2}\int_{\Lambda}d^4x(\partial\mathbf{E}-\rho)^2\right) = \int\mathcal{D}\sigma\exp\int_{\Lambda}d^4x\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\sigma^2+i\sigma(\partial\mathbf{E}-\rho)\right). \quad (5.26)$$

Вычислим интеграл по \mathbf{E}

$$\int\mathcal{D}\mathbf{E}\exp\int_{\Lambda}d^4x\left(-\frac{1}{2}\mathbf{E}^2+i\mathbf{E}\dot{\mathbf{A}}+i\sigma\partial\mathbf{E}\right)\delta(R^2E_{\parallel}(R\hat{\mathbf{x}})+\chi(\hat{\mathbf{x}}))$$

$$= \exp \left(-\frac{1}{2} \int_{\Lambda} d^4x (\dot{\mathbf{A}}^2 + (\partial\sigma)^2) - i \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \chi\sigma \right). \quad (5.27)$$

После интегрирования по частям в слагаемом $\int d\mathbf{x} \sigma \partial \mathbf{E}$ мы применили в поверхностном члене условие следующее из дельта-функции. Кроме того, мы провели интегрирование по частям в слагаемом $\int d\mathbf{x} \dot{\mathbf{A}} \partial \sigma$, где соответствующий поверхностный член исчезает в силу калибровочного условия. Зависимость от переменной χ содержится только в интеграле

$$\tilde{Z} = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left(- \int_{\Lambda} d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial\sigma)^2 + \frac{\epsilon^2}{2} \sigma^2 + i\sigma\rho \right) - i \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \chi\sigma \right). \quad (5.28)$$

Можно видеть, что граничное условие на E_{\parallel} эквивалентно дополнительному поверхностному члену в данной формуле. Интеграл вычисляется непосредственно сдвигом переменной интегрирования $\sigma = \sigma_1 + \varsigma$. Новая переменная удовлетворяет граничному условию $R^2 \sigma'_1(R\hat{\mathbf{x}}) = 0$, и ς находится из условия отсутствия после сдвига линейного члена по σ_1 . Это дает уравнение на ς

$$(\Delta - \epsilon^2)\varsigma = i\rho, \quad (5.29)$$

из которого получаем $\tilde{Z} = \tilde{Z}_1 \tilde{Z}_2$,

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_1 &= \int \mathcal{D}\sigma_1 \exp \left(- \int_{\Lambda} d^4x \left(\frac{1}{2} (\partial\sigma_1)^2 + \frac{1}{2} \epsilon^2 \sigma_1^2 \right) \right. \\ &\quad \left. - \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \sigma_1 (R^2 \varsigma' + i\chi) \right), \end{aligned} \quad (5.30)$$

$$\tilde{Z}_2 = \exp \left(-\frac{i}{2} \int_{\Lambda} d^4x \rho \varsigma - \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \varsigma \left(\frac{1}{2} R^2 \varsigma' + i\chi \right) \right). \quad (5.31)$$

Заметим, что граничное условие на σ_1 допускает определенный произвол, а именно $\sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_R(\hat{\mathbf{x}})$, $\sigma_2(R\hat{\mathbf{x}}) = 0$. Интегрирова-

ние по *переменным на границе* $\sigma_R(\hat{\mathbf{x}})$ дает поверхностную дельта-функцию

$$\int \mathcal{D}\sigma_R(\hat{\mathbf{x}}) \exp\left(-\int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \sigma_R(\hat{\mathbf{x}})(R^2 \varsigma' + i\chi)\right) = \delta(R^2 \varsigma' + i\chi). \quad (5.32)$$

Применяя граничное условие на ς , мы окончательно получаем

$$\tilde{Z} = \exp\left(-\frac{i}{2}\beta \int_V d\mathbf{x} \varsigma \rho - \frac{i}{2}\beta \int_V d\hat{\mathbf{x}} \varsigma \chi\right). \quad (5.33)$$

Переобозначая $\varsigma = -i\varphi$, мы полностью воспроизводим ответ (5.6,5.7,5.8) полученный ранее. Таким образом, формулировка в терминах коллективной переменной эквивалентна традиционной, если учитывается вклад поверхностных членов и интегрирование по переменной на границе $\sigma_R(\hat{\mathbf{x}})$.

5.3. Эффективное действие глюодинамики

Рассмотрим функциональный интеграл Фаддеева–Попова для производящего функционала функций Грина [95, 96]

$$Z[\chi; \zeta, \eta] = \int \mathcal{D}\mathbf{A}_\perp \mathcal{D}\mathbf{E}_\perp \mathcal{D}A_0(R\hat{\mathbf{x}}) \exp\left(-\int_\Lambda d^4x [\mathbf{E}\dot{\mathbf{A}} - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + i\zeta E_\parallel - \eta B_\parallel] + \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} A_0(R\hat{\mathbf{x}})(R^2 E_\parallel(R\hat{\mathbf{x}}) + \chi(\hat{\mathbf{x}}))\right). \quad (5.34)$$

В данной формуле предполагается, что E_\parallel выражено через поперечные компоненты с помощью соотношения (2.7). Мы будем здесь использовать Евклидовы обозначения, в которых электрическое поле является чисто мнимым. Поля удовлетворяют периодическим граничным условиям по времени на интервале $[0, \beta]$ и граничным условиям (3.22-3.26) на пространственной бесконечности. Мы ввели

источники для продольных компонент полей поверхностный член с χ . Для краткости ниже члены с источниками как правило не будут выписываться явно, если это не является необходимым.

Используем следующее простое наблюдение. В выражениях

$$\mathbf{E}^2 = \mathbf{E}_\perp^2 + E_\parallel^2, \quad \mathbf{B}^2 = \mathbf{B}_\perp^2 + B_\parallel^2, \quad \mathbf{B}_\perp = P \mathbf{B} = P \operatorname{rot} \mathbf{A}_\perp$$

можно видеть, что все нелокальные и неабелевы конструкции содержатся только в продольных компонентах. Введем две вспомогательные периодические по времени действительные переменные, λ и ν с помощью интегральных представлений

$$\exp\left(\frac{1}{2} \int_\Lambda dx E_\parallel^2\right) = \int \mathcal{D}\lambda \exp\left(\int_\Lambda dx \left[-\frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda E_\parallel\right]\right), \quad (5.35)$$

$$\exp\left(-\frac{1}{2} \int_\Lambda dx B_\parallel^2\right) = \int \mathcal{D}\nu \exp\left(\int_\Lambda dx \left[-\frac{1}{2}\nu^2 + i\nu B_\parallel\right]\right). \quad (5.36)$$

Произведем преобразование

$$\int_{V_R} d\mathbf{x} \lambda(x\hat{\mathbf{x}}) \frac{1}{x^2} \int_0^x y^2 dy \Phi_\perp(y\hat{\mathbf{x}}) = \int_{V_R} d\mathbf{x} \Phi_\perp(\mathbf{x}) \tilde{\sigma}_R(\mathbf{x}), \quad (5.37)$$

$$\tilde{\sigma}_R(\mathbf{x}) \equiv \int_x^R dy \lambda(y\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.38)$$

и затем проинтегрируем по частям члены

$$\begin{aligned} \int_{V_R} d\mathbf{x} \tilde{\sigma}_R(\mathbf{x}) \partial \mathbf{E}_\perp &= - \int_{V_R} d\mathbf{x} \mathbf{E}_\perp P \partial \tilde{\sigma}_R + \int_{\partial V_R} d\hat{\mathbf{x}} R^2 \mathbf{E}_\perp(R\hat{\mathbf{x}}) \tilde{\sigma}_R(R\hat{\mathbf{x}}), \\ \int_{V_R} d\mathbf{x} \nu \hat{\mathbf{x}} \operatorname{rot} \mathbf{A}_\perp &= \int_{V_R} d\mathbf{x} \mathbf{A}_\perp [\partial \nu, \hat{\mathbf{x}}] + \int_{\partial V_R} d\hat{\mathbf{x}} R^2 \nu [\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{A}_\perp]. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Поверхностные члены тождественно равны нулю в силу определения поперечности. Заметим, что интегралы по поперечным компонентам стали гауссовыми после введения коллективных переменных и могут быть явно вычислены. Для более компактной записи

удобно пользоваться новой переменной аналогичной введенной нами в формуле (3.36), и принимающей нетривиальные значения на границе,

$$\sigma(\mathbf{x}) \equiv A_0(R\hat{\mathbf{x}}) + \tilde{\sigma}_R(\mathbf{x}), \quad (5.40)$$

а под интегрированием по этой переменной будем понимать интегрирования по исходным переменным $\mathcal{D}\sigma \equiv \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}A_0(R\hat{\mathbf{x}})$.

Проинтегрируем по \mathbf{E}_\perp

$$\begin{aligned} I &= \int \mathcal{D}\mathbf{E}_\perp \exp\left(\int_\Lambda dx \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}^a)^2 - \mathbf{E}^a (\dot{\mathbf{A}}^a + P\partial\sigma^a - gt^{abc} \mathbf{A}^b \sigma^c)\right]\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_\Lambda dx [\dot{\mathbf{A}}^a + P\partial\sigma^a - gt^{abc} \mathbf{A}^b \sigma^c]^2\right). \end{aligned} \quad (5.41)$$

В интеграле по \mathbf{A}_\perp , возникшем после интегрирования по электрическому полю, совершим поворот

$$A_{\perp i} = \varepsilon_{ijk} \mathcal{A}_{\perp j} \hat{x}_k,$$

сохраняющий область интегрирования и имеющий в качестве якобиана ненулевую константу нормировки. В интеграле

$\int_{V_R} d\mathbf{x} \left(\frac{1}{x}\hat{\mathbf{x}}\partial(x\mathcal{A}_\perp)\right)^2$ можно осуществить интегрирование по частям, а поверхностный член равен нулю в силу граничного условия (3.26).

После этих выкладок стат. сумма записывается как

$$\begin{aligned} Z &= \int \mathcal{D}\mathcal{A}_\perp \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\nu \exp\left(-\frac{1}{2}\nu \bullet \nu - \frac{1}{2}\partial\sigma \bullet \partial\sigma \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2}\mathcal{A} \bullet M \bullet \mathcal{A} + \mathcal{A} \bullet N\right), \end{aligned} \quad (5.42)$$

$$M^{ab} = (-\Delta_x \delta^{ab} - (\nabla_t^2)^{ab})P + i gt^{abc} \nu^c L, \quad (5.43)$$

$$N_i^a = i P_{ij} \partial_j \nu^a - L_{ij} \nabla_t^{ab} \partial_j \sigma^b, \quad \nabla_t^{ab} = \delta^{ab} \partial_t - gt^{abc} \sigma^c. \quad (5.44)$$

Точка \bullet обозначает интегрирование по области Λ , а операторы P и L определены

$$L_{ij} = \varepsilon_{ijk} \hat{x}_k, \quad P_{ij} = \delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j. \quad (5.45)$$

Тривиально проверяется, что они удовлетворяют простой алгебре

$$P^2 = P, \quad L^2 = -P, \quad LP = PL = L. \quad (5.46)$$

Пусть α , β и γ – произвольные операторы коммутирующие с P и L , но не обязательно друг с другом. Будем обозначать полный след с большой буквы, а след по степеням свободы кроме соответствующих P и L – с малой. Алгебра (5.46) позволяет вывести

$$\begin{aligned} (\alpha P + \beta L)^n &= \alpha_n P + \beta_n L, \\ \alpha_n &= \operatorname{Re}(\alpha + i\beta)^n \equiv \frac{1}{2}[(\alpha + i\beta)^n + (\alpha - i\beta)^n], \\ \beta_n &= \operatorname{Im}(\alpha + i\beta)^n \equiv \frac{1}{2i}[(\alpha + i\beta)^n - (\alpha - i\beta)^n], \end{aligned}$$

что дает

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr} \log[\gamma \mathbf{1} + \alpha P + \beta L] &= \operatorname{tr} \log \gamma + \operatorname{tr} \log[(\alpha + \gamma + i\beta)(\alpha + \gamma - i\beta)], \\ (\gamma \mathbf{1} + \alpha P + \beta L)^{-1} &= \gamma^{-1}(\mathbf{1} - P) + \operatorname{Re}(\alpha + \gamma + i\beta)^{-1} P + \\ &+ \operatorname{Im}(\alpha + \gamma + i\beta)^{-1} L. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Интеграл по \mathcal{A}_\perp вычисляется непосредственно и с помощью вышеописанных формул можно исключить из результата пространственную векторную структуру. Несколько другой и более эле-

гантный путь состоит во введении проекционных операторов и соответствующих компонент поперечных векторов

$$\Pi_{\pm} = \frac{1}{2}(P \pm iL), \quad \mathbf{a}_{\pm} = \Pi_{\pm} \mathbf{a}. \quad (5.48)$$

Они также обладают простой алгеброй

$$\Pi_{\pm} = \Pi_{\pm}^2, \quad \Pi_+ \Pi_- = 0, \quad \Pi_+ + \Pi_- = P, \quad (5.49)$$

Перепишем (5.42) через \mathcal{A}_{\pm} проекции

$$Z = \int \mathcal{D} \mathcal{A}_+ \mathcal{D} \mathcal{A}_- \mathcal{D} \sigma \mathcal{D} \nu \exp(-W[\sigma, \nu, \mathcal{A}_{\pm}]), \quad (5.50)$$

$$W[\sigma, \nu, \mathcal{A}_{\pm}] = \frac{1}{2} \nu \bullet \nu + \frac{1}{2} \partial \sigma \bullet \partial \sigma + \frac{1}{2} \mathcal{A} \bullet \mathcal{C} \bullet \mathcal{A} + i \mathcal{A} \bullet \mathcal{K},$$

$$\mathcal{A} = (\mathcal{A}_-, \mathcal{A}_+), \quad \mathcal{K} = (K_+, K_-),$$

$$\mathcal{C} = \begin{pmatrix} 0 & C_+ \\ C_- & 0 \end{pmatrix}, \quad D^{ab} = g t^{abc} \nu^c,$$

$$C_{\pm} = -\Delta_x - \nabla_t^2 \pm D, \quad K_{\pm} = \partial_{\pm} \nu \pm \nabla_t \partial_{\pm} \sigma.$$

Интегралы по \mathcal{A}_{\pm} теперь элементарны. Имеем

$$\begin{aligned} Z[\chi] &= \int \mathcal{D} \sigma \mathcal{D} \nu \exp(-W[\sigma, \nu] + \int_{\partial \Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \sigma \chi), \quad (5.51) \\ W[\sigma, \nu] &= \frac{1}{2} \nu \bullet \nu + \frac{1}{2} \partial \sigma \bullet \partial \sigma + \frac{1}{2} K_- \bullet C_+^{-1} \bullet K_+ \\ &\quad + \frac{1}{2} K_+ \bullet C_-^{-1} \bullet K_- + \frac{1}{2} \text{tr} \log C_+ C_-, \end{aligned}$$

где мы явно выписали зависимость от параметра χ . Обсудим теперь вопрос об учете источников. Во-первых, для включения источника J калибровочного поля \mathbf{A}_{\perp} нужно добавить к действию $\Delta W = g J_0 \bullet \sigma$ и изменить $K_{\pm} \rightarrow K_{\pm} \pm g J_{\pm}$ в предыдущей формуле.

Можно связать производящий функционал продольных компонент напряженностей (5.34) с производящим функционалом

$$\mathcal{Z}[\zeta, \eta] = \int \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\nu \exp [-W[\lambda, \eta] - i(\lambda \bullet \zeta + \eta \bullet \nu)]. \quad (5.52)$$

Для этого в формуле (5.34) достаточно представить

$$e^{\int_{\Lambda} dx (\eta B_{\parallel} - \frac{1}{2}\nu^2 + i\nu B_{\parallel})} = e^{-\int_{\Lambda} dx \frac{\nu^2}{2}} e^{-\int_{\Lambda} dx i\eta \frac{\delta}{\delta \nu}} e^{\int_{\Lambda} dx i\nu B_{\parallel}},$$

затем проинтегрировать функционально по частям

$$\int \mathcal{D}\nu (\text{пр. ч. пред. ф.}) = \int \mathcal{D}\nu e^{-\int_{\Lambda} dx (\frac{1}{2}[\nu + i\eta]^2 - i\nu B_{\parallel})},$$

и совершенно аналогично для λ , что дает

$$Z[\zeta, \eta] = \exp \left[\frac{1}{2} \int_{\Lambda} dx (\zeta^2 + \eta^2) \right] \mathcal{Z}[\zeta, \eta]. \quad (5.53)$$

После некоторых преобразований с операторами сдвига в функциональном пространстве и применения для них представлений через функциональные интегралы следует формула связи для средних. Пусть $F(E_{\parallel}, B_{\parallel})$ – произвольный функционал от продольных напряженностей. Тогда среднее

$$\langle F(E_{\parallel}, B_{\parallel}) \rangle = Z^{-1}[\zeta, \eta] F\left(i\frac{\delta}{\delta \zeta}, \frac{\delta}{\delta \eta}\right) Z[\zeta, \eta] \Big|_{\zeta=\eta=0} \quad (5.54)$$

выражается через среднее $\langle F(\lambda, \nu) \rangle$, определяемое $\mathcal{Z}[\zeta, \eta]$, с помощью формулы

$$\begin{aligned} \langle F(E_{\parallel}, B_{\parallel}) \rangle &= \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\theta \exp\left(-\frac{1}{2} \int_{\Lambda} dx [\xi^2 + \theta^2]\right) \\ &\langle F(\lambda + i\xi, -i\nu + \theta) \rangle. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Последнее соотношение лежит в основе интерпретации коллективных переменных. Их можно представлять себе как продольные (хромом) электрическое и магнитное поля, сглаженные гауссовым шумом. Интересно отметить, кроме того, что хотя λ и ν действительны в интеграле, их средние чисто мнимы

$$\begin{aligned}\langle E_{\parallel} \rangle &= \langle \lambda \rangle, & \langle B_{\parallel} \rangle &= -i \langle \nu \rangle, \\ \langle E_{\parallel} \rangle^* &= -\langle E_{\parallel} \rangle, & \langle B_{\parallel} \rangle^* &= \langle B_{\parallel} \rangle.\end{aligned}\quad (5.56)$$

Применим метод стационарной фазы к действию (5.51). В “классическом” приближении по переменным σ и ν , которое является квазиклассическим по исходным калибровочным полям, нужно найти минимумы эффективного действия. Используем естественный анзац постоянных коллективных переменных. Согласно уравнению (5.56), нужно брать чисто мнимое магнитное поле в точке перевала, поэтому изменим обозначение $\nu \rightarrow i\nu$. В терминах спектральных разложений для операторов ∂_t (периодические граничные условия) и Δ_x (условие Неймана на границе), можно записать

$$W[\sigma, \nu] = -\frac{\beta V_R}{2} \nu^2 + 2\pi \delta(\hat{0}) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{tr} \log C_+ C_-, \quad (5.57)$$

$$C_{\pm}^{ab} = (\omega_n^2 + \Omega_m^2) \delta^{ab} + i(2\omega_n \sigma^c \pm \nu^c) g t^{abc} - (g t^{abc} \sigma^c)^2, \quad (5.58)$$

где $\omega_n = 2\pi\beta n$ и $\Omega_m = \pi(m + 1/2)/R$. Введем обозначения для плотности свободной энергии, \mathcal{F}_R ,

$$W_R = \beta V_R \mathcal{F}_R, \quad \mathcal{F}_R = \gamma_R F_R, \quad \gamma_R = \frac{8\pi^2 R \delta(\hat{0})}{\beta^2 V_R}, \quad (5.59)$$

где $V_R = 4\pi R^3/3$ – объем области. Здесь $\delta(\hat{0}) = \frac{1}{4\pi} \sum_l (2l+1)$ обозначает угловую дельта-функцию с совпадающими аргументами, ко-

торая является ультрафиолетово расходящейся. Результат удобнее переписать в терминах переменных $s = (g\beta/2\pi)\sigma$, $v = (g\beta/2\pi)^2\nu$.

Для начала ограничимся более простым случаем калибровочной группы $SU(2)$, а затем обобщим результат на группу $SU(3)$. Обозначим $v = u^2$ и используем формулы

$$\prod_{m=0}^{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{(m + 1/2)^2}\right) = \cosh \pi a, \quad \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{a^2}{m^2}\right) = \frac{\sinh \pi a}{\pi a}. \quad (5.60)$$

Можно показать (см. Приложение Б), что наличие части цветового вектора v поперечной s приводит к мнимой части эффективного действия. Поэтому ограничимся анзацем, в котором данные векторы коллинеарны. Заметим, что для группы $SU(2)$ оператор $\mathcal{L}^{ab} = t^{abc}\hat{z}^c$ имеет такую же алгебру как оператор L рассмотренный ранее в \mathbf{x} -пространстве, и детерминант линейной комбинации его степеней вычисляется используя формулы (5.47). После вычисления цветного следа приходим к ответу (с точностью до несущественной постоянной)

$$F_R[u, s] = -a u^4 + \mathcal{U}_R[u, s], \quad (5.61)$$

$$\mathcal{U}_R[u, s] = \mathcal{U}_R[s] + \mathcal{V}_R[u, s], \quad (5.62)$$

$$\mathcal{V}_R[u, s] = \frac{\beta}{2\pi R} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \log \frac{L_R((n+s)^2 + u^2) L_R((n+s)^2 - u^2)}{L_R^2((n+s)^2)}, \quad (5.63)$$

$$\mathcal{U}_R[s] = \frac{\beta}{\pi R} \sum_{m=0}^{\infty} \log \left(1 - \frac{\cos 2\pi s}{\cosh(\pi(m + 1/2)\beta/R)}\right), \quad (5.64)$$

где $L_R(x) = \cosh(2\pi R\sqrt{x}/\beta)$ и $a = (2\pi)^4/(2g^2\beta^4\gamma_R)$. Выражение периодически по s и можно ограничиться периодом $0 \leq s \leq 1$, или полупериодом в виду четности относительно $s = 1/2$. При конечном R , вычисляя производную эффективного действия по u^2 и приравнивая

ее к нулю, можно видеть что результирующее уравнение допускает только тривиальное решение $u = 0$. Далее, полагая u нулю, легко видеть, что минимум действия достигается при $s = 0$. Таким образом, в системе конечного размера фазовый переход отсутствует, что может служить иллюстрацией к теореме Янга и Ли [114]. Поведение эффективного действия меняется в термодинамическом пределе $R \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{U}[s, u] = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dv \log \left[\left(\cosh \sqrt{v^2 + (2\pi u)^2} - \cos [2\pi s] \right) \left(\cosh \sqrt{v^2 - (2\pi u)^2} - \cos [2\pi s] \right) / \cosh^2 v \right], \quad (5.65)$$

$$\mathcal{U}[s, 0] = -\frac{1}{2}(1 - 2s)^2 + \frac{1}{8}, \quad (0 \leq s \leq 1), \quad (5.66)$$

где мы использовали формулы для вычисления интеграла

$$I(a, b) = \int_0^\infty dx \frac{\cosh bx}{\cosh x + a} = \frac{\pi}{\sqrt{1 - a^2}} \frac{\sin(b \arccos a)}{\sin \pi b},$$

поскольку

$$\mathcal{U}[0, s] = -2 \frac{\partial}{\partial b} \Big|_{b=1} (I(a, b) - I(0, b)).$$

Интеграл может быть преобразован в ряды

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \mathcal{V}[s, u] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\left[\sqrt{(n+s)^2 + u^2} + \sqrt{(n+s)^2 - u^2} \right]_+ - \right. \\ &\quad \left. - 2 |n+s| \right), \\ \operatorname{Im} \mathcal{V}[s, u] &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{u^2 - (n+s)^2}_+. \end{aligned} \quad (5.67)$$

Графики действительной и мнимой частей представлены нами на Рис. 1 и 2. Применяя к данным рядам формулу суммирования по Пуассону из Приложения В найдем разложения по цилиндрическим

функциям

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \mathcal{V}[s, u] &= 2s(s-1) + u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[2\pi ns]}{n} \left(Y_1(2\pi nu) - \frac{2}{\pi} K_1(2\pi nu) \right), \\ \operatorname{Im} \mathcal{V}[s, u] &= \frac{\pi u^2}{2} + u \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos[2\pi ns]}{n} J_1(2\pi nu).\end{aligned}\quad (5.68)$$

Асимптотические формулы могут быть получены исходя из асимптотики функций Бесселя и Неймана, и выражаются через периодическое продолжение по формуле Гурвица из Приложения В обобщенной дзета-функции

$$\begin{aligned}\operatorname{Re} \mathcal{U}[s, u] &= \sqrt{2u} \left[\zeta_H\left(-\frac{1}{2}, u+s\right) + \zeta_H\left(-\frac{1}{2}, u-s\right) \right], \\ \operatorname{Im} \mathcal{U}[s, u] &= \frac{\pi u^2}{2} + \sqrt{2u} \left[\zeta_H\left(-\frac{1}{2}, u+s\right) + \zeta_H\left(-\frac{1}{2}, u-s\right) \right]\end{aligned}\quad (5.69)$$

Учитывая периодичность и значения в концевых точках дзета-функции, легко придти к нижеследующему заключению, которое справедливо и за пределами применимости ассимптотических формул.

Вычислим производную $\partial F[u, s]/\partial u^2$ и приравняем ее к нулю в точке $u = s = 1/2$. Отсюда определяется критическое значение параметра a ,

$$a_c = 2\sqrt{2} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left(((2n+1)^2 + 1)^{-1/2} - ((2n+1)^2 - 1)^{-1/2} \right). \quad (5.70)$$

Используя переразложение

$$(m^2 \pm 1)^{-1/2} = \frac{1}{m} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mp 1)^k (2k-1)!!}{2^k k!} \frac{1}{m^{2k+1}} \quad (5.71)$$

и связь с ζ -функцией Римана $\sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-s} = (1-2^{-s}) \zeta(s)$ придем к представлению в виде быстро сходящегося ряда

$$a_c = 2\sqrt{2} - 8 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(4k+1)!!}{(2k+1)! 2^{2k+1}} \left(\left(1 - \frac{1}{2^{4k+3}}\right) \zeta(4k+3) - 1 \right), \quad (5.72)$$

который примерно равен $a_c \simeq 2.61882$.

Если параметр “ a ”, который имеет смысл температуры в квадрате, больше величины a_c , то существует только тривиальная фаза с минимумами при целочисленных значениях s и u . При меньших a появляются минимумы свободной энергии при полуцелых значениях u и s (см. Рис. 3). Условие стабильности $\text{Im } F = 0$ (Рис. 2) дает $u \leq s$ и исключает все минимумы кроме тривиального $u = s = 0$ и нетривиального $u = s = 1/2$, второй из которых является более глубоким. Заметим, что минимумами также являются результаты действия на $s = 1/2$ преобразований из центра Z_2 с помощью сдвигов $s \rightarrow s + 1$.

Легко видеть, что в термодинамическом пределе точками стац. фазы будут являться не только константные поля. Действительно, операторы под следом диагональны по $\hat{\mathbf{x}}$, и поэтому наличие зависимости $s(\hat{\mathbf{x}})$ ведет к замене величины 4π на интеграл по сфере. Кинетические члены при этом становятся нетривиальными, но они пропорциональны R и могут быть отброшены в термодинамическом пределе. Как мы видели, единичный вектор в цветовом пространстве, которому пропорционально стац. фазное решение, оставался произвольной константой, но теперь мы видим, что он может быть произвольной функцией $\hat{s}(\hat{\mathbf{x}})$.

Анализ формул для группы $SU(2)$ подсказывает, что можно ограничиться анзацем, в котором цветовые векторы могут быть одновременно преобразованы в базис, где только их картановские компоненты ($a = 3, 8$) отличны от нуля, так как наличие части u поперечной s приводит к мнимой части эффективного действия, и

следовательно, не представляет интереса. Введем обозначения

$$s_{\pm} \equiv \frac{1}{2}(s_3 \pm \sqrt{3} s_8), \quad s_0 \equiv s_3 = s_+ + s_- \quad (5.73)$$

и аналогично для v . Тогда после вычисления цветового следа можно получить [115]

$$F_{SU(3)}[v, s] = \sum_{A=0, \pm} \left(-\frac{2a}{3} v_A^2 + \mathcal{U}_{SU(2)}[v_A, s_A] \right). \quad (5.74)$$

Таким образом, плотность свободной энергии группы $SU(3)$ устроена как сумма трех независимых выражений группы $SU(2)$. В силу поведения этой функции для группы $SU(2)$ можно видеть, то нетривиальный минимум достигается при равенстве нулю одной из величин s_+ , s_- , $s_+ + s_-$, и двух остальных $-1/2$, а соответствующих компонент v аналогично нулю и $1/4$. Таким образом минимумами эффективного действия (см. Рис. 4) являются цветовые вектора с компонентами 3, 8: $\vec{s}_{\pm} = (1/2, \pm 1/(2\sqrt{3}))$ и $\vec{s}_0 = (0, 1/\sqrt{3})$, а также полученные из них действием преобразования центра Z_3 : $s_3 \rightarrow s_3 + 1$, $s_8 \rightarrow s_8 + 1/\sqrt{3}$ или $s_3 \rightarrow s_3$, $s_8 \rightarrow s_8 + 2/\sqrt{3}$. Все эти минимумы имеют одинаковую глубину, которая при температуре ниже критической, больше глубины тривиальных минимумов, получаемых центральными преобразованиями из нуля. Температура фазового перехода, при которой возникают ненулевые значения, равна

$$T_{SU(3)} = \sqrt{\frac{3}{2}} T_{SU(2)}. \quad (5.75)$$

Вернемся теперь к рассмотрению зависимости от граничной переменной χ . Не теряя общности, ограничимся формулировкой для

группы $SU(2)$. Итак, формула (5.51) дает нам желаемое представление вида

$$Z[\chi] = \int \mathcal{D}\sigma \exp \left(-W[\sigma] - i \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \sigma \chi \right). \quad (5.76)$$

В нулевом стац. фазном приближении стат. сумма определяется классическим уравнением движения для коллективной переменной. Разложим действие в окрестности седловой точки

$$\begin{aligned} W[\varsigma + \sigma_1] &= W[\varsigma] + \int_{\Lambda} d^4x \frac{\delta W}{\delta \varsigma(\mathbf{x})} \sigma_1(\mathbf{x}) \\ &\quad + \int_{\partial\Lambda} dt R^2 d\hat{\mathbf{x}} \mathcal{E}^{(1)}[\varsigma] \sigma_1(R\hat{\mathbf{x}}) + \dots, \end{aligned} \quad (5.77)$$

где $\mathcal{E}^{(1)}[\varsigma]$ – первая производная Эйлера от действия. В нулевом приближении после интегрирования по переменной на границе $\sigma_R(\hat{\mathbf{x}})$ получаем

$$Z[\chi] \propto \exp \left(-W[\varsigma] - i \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{\mathbf{x}} \varsigma \chi \right) \delta \left(R^2 \mathcal{E}^{(1)}[\varsigma](R\hat{\mathbf{x}}) + i\chi(\hat{\mathbf{x}}) \right), \quad (5.78)$$

$$\frac{\delta W}{\delta \varsigma} = 0. \quad (5.79)$$

Уравнение и граничное условие

$$\frac{\delta W}{\delta \varsigma} = 0, \quad R^2 \varsigma'(R\hat{\mathbf{x}}) = -i\chi(\hat{\mathbf{x}}) \quad (5.80)$$

достаточно сложны в неабелевом случае. Для малого $\chi(\hat{\mathbf{x}})$ можно разложить $\varsigma = \varsigma^{(0)} + \varsigma^{(1)}$ решение вблизи решения с тривиальным граничным условием $\varsigma^{(0)'}(R\hat{\mathbf{x}}) = 0$. Модуль решения при этом определяется стац. фазным значением, а единичные векторы $\hat{\chi}$ и $\hat{\varsigma}$, должны совпадать, что можно усмотреть из предельного перехода при малом χ .

Как мы видели, абелева теория допускает только тривиальное решение $\zeta^{(0)} = 0$. В неабелевой теории такая же ситуация реализуется для $T > T_c$. В этом случае ζ определяется из линеаризованного уравнения и зависимость $Z_R[\chi]$ имеет поведение аналогичное данной величине в абелевой теории. А именно, она содержит дельта-функцию, выражающую закон сохранения глобального заряда, но кроме этого, тривиальна в том смысле, что $Z[\chi_{lm}] \rightarrow 1$ при $R \rightarrow \infty$.

Однако, при температуре ниже критической точки существует постоянное ненулевое решение $|\zeta^{(0)}| = \pi/g\beta$ и зависимость приобретает вид

$$Z[\chi] = \prod_{\hat{\mathbf{x}}} \cos \beta \zeta^{(0)} \chi(\hat{\mathbf{x}}). \quad (5.81)$$

В этой формуле мы использовали тот факт, что $\zeta^{(0)}$ может иметь оба знака независимо в каждой точке сферы $\hat{\mathbf{x}}$. Произведение (5.81) равно нулю, если $\chi(\hat{\mathbf{x}})$ отлично от нуля и равно единице в противном случае. Таким образом, только значение $\chi(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ статистически возможно в фазе конфайнмента.

При вычислении средних необходимо учесть меру фазового пространства переменных $\hat{\chi}$ – орбит присоединенного преобразования группы, а также, либо просуммировать по всем допустимым значениям $|\chi|$, либо рассматривать “домены” с произвольными значениями этой величины. Следовательно, температурное среднее некоторой наблюдаемой A дается следующей формулой

$$\langle A \rangle = \begin{cases} \langle A \rangle_0, & T < T_c, \\ \int d\chi(\hat{\mathbf{x}}) \langle A \rangle_\chi, & T > T_c, \end{cases} \quad (5.82)$$

где

$$\langle A \rangle_\chi = \frac{1}{Z[\chi]} \int \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\nu e^{-W[\sigma, \nu] - i \int_{\partial\Lambda} dt d\hat{x} \sigma_\chi} A[\sigma, \nu]. \quad (5.83)$$

Мы не будем обсуждать здесь правильную процедуру вычисления средних в фазе деконфайнмента, хотя ситуация по-видимому аналогична известным физическим системам, таким как спиновые стекла [116]. Если при высокой температуре вычислить интеграл по всем χ , он выдаст $\delta(\sigma_\infty(\hat{\mathbf{x}}))$, и следовательно, эффективно удалит интегрирование по переменной на границе. Напротив, при низкой температуре реализуется только значение $\chi = 0$ и интеграл по переменной на границе в среднем $\langle A \rangle_0$ дает синглетный проектор P_s группы больших калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_0 &= \int \mathcal{D}\sigma_\infty(\hat{\mathbf{x}}) \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_R[0]} \text{Tr} (e^{-\beta H_R - iQ(\sigma_\infty)} A) \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{Z_R[0]} \text{Tr} (e^{-\beta H_R} P_s A), \end{aligned} \quad (5.84)$$

где $Q(\sigma_\infty)$ – генераторы данных преобразований.

В заключение обсудим симметрию относительно группы центра Z_N , рассматриваемой нами более подробно ниже, которая реализуется как сдвиги $g\beta A_0$ специального вида. Например, для группы $SU(2)$ в присоединенном представлении возможны только сдвиги на целые числа. Напомним, что центр фундаментального представления $SU(N)$ генерируется корнями единицы $\exp(i2\pi n/N)$, но присоединенное представление $SU(2)$ совпадает с присоединенным представлением $SO(3)$ и поэтому в нем элементы центра представлены тривиально.

Из проведенного анализа очевидно спонтанное нарушение Z_N

симметрии при высокой температуре, в фазе деконфайнмента, поверхностным членом в любом состоянии с отличным от нуля χ . В фазе конфайнмента эта симметрия не нарушена, так как $\chi = 0$, а стат. сумма содержит интегрирование по поверхностному множителю Лагранжа, в силу которого сдвиг этой переменной интегрирования на величину среднего $\langle A_0 \rangle$ тривиален на поверхности дельта-функции и не нарушает симметрию. Кроме того, действиями Z_N все минимумы (в том числе и нетривиальные) переводятся друг в друга.

6. Критерии конфайнмента.

Вильсоновская петля

В рассматриваемом нами формализме понятие конфайнмента было введено как синглетность относительно группы больших калибровочных преобразований всех состояний вносящих вклад в температурные средние наблюдаемых, на которых генераторы преобразований обращаются в нуль

$$\int_0^R y^2 dy \Phi_{\perp}(y\hat{\mathbf{x}}) = 0. \quad (6.1)$$

С помощью закона Гаусса перепишем $\Phi_{\perp} = \partial \mathbf{E}_{\parallel}$ и проинтегрируем (6.1) по произвольной площадке ΔS на границе, преобразовав объемный интеграл в поверхностный интеграл по охватывающей конической поверхности плюс интеграл по самой площадке. Очевидно, что нормаль к конической поверхности ортогональна $\hat{\mathbf{x}}$, и поэтому интеграл по ней равен нулю. Таким образом, условие (6.1)

эквивалентно равенству нулю потока хромо-электрического поля через любой элемент границы. Отметим, что условие равенства нулю потока хромо-магнитного поля через произвольный элемент границы также естественно возникало в нашем подходе. Данная формулировка конфайнмента, по существу, совпадает с интуитивными физическими представлениями и из нее следует ненаблюдаемость цветных состояний на бесконечности.

Было бы естественно вычислить другую физическую характеристику невылетания цвета – энергию $E(L)$ состояния с двумя статическими цветными источниками кварк – антикварк, расположенными на расстоянии L друг от друга. Эта величина является функцией отклика калибровочного поля на внесение пробных источников и выражается через геометрическую характеристику поля – петлю Вильсона [62, 13]

$$\mathcal{W}[\Gamma] = \langle \text{Tr P} \exp(g \oint_{\Gamma} A_{\mu} dx^{\mu}) \rangle, \quad A_{\mu} = A_{\mu}^a t^a, \quad (t^a)^{\dagger} = -t^a, \quad (6.2)$$

где t^a – генераторы фундаментального представления группы $SU(N)$, а Γ – замкнутый контур в пространстве–времени (для определенности мы будем рассматривать прямоугольный контур длины T во временном направлении и длины L в пространственном). Асимптотика Вильсоновской петли при большом T связана с энергией взаимодействия зарядов $\mathcal{W}[\Gamma] \propto \exp(-T E(L))$. Согласно критерию конфайнмента Вильсона [62], фаза конфайнмента соответствует закону площадей $\mathcal{W}[\Gamma] \propto \exp(-\chi S(\Gamma))$, а Кулоновская фаза – закону периметров $\mathcal{W}[\Gamma] \propto \exp(-\mu P(\Gamma))$, где $S(\Gamma) = LT$ и $P(\Gamma) = 2(T + L)$ обозначают площадь и периметр контура. Па-

раметр пропорциональности в линейно растущей потенциальной энергии, $E(L) = \chi L$, называется коэффициентом натяжения струны. Такое название имеет наглядную интерпретацию, так как при этом поток цветного электрического поля между зарядами сжат в трубки (струны) фиксированной толщины [13]. Петля Вильсона по определению является калибровочно-инвариантным объектом.

В вычислениях на решетке более популярным является другой критерий конфайнмента. Он ассоциируется с линией Полякова [17, 71]

$$\mathcal{P}(\mathbf{x}) = T \exp \int_0^\beta dt A_0(t, \mathbf{x}). \quad (6.3)$$

Температурное среднее произведений следов данного оператора связано со свободной энергией пробных точечных зарядов внесенных в систему в точки являющиеся его аргументами. Среднее следа линии Полякова, которое пропорционально статистической сумме уединенного заряда в поле, инвариантно лишь относительно калибровочных преобразований удовлетворяющих периодическим граничным условиям $U(0, \mathbf{x}) = U(\beta, \mathbf{x})$. Согласно другому критерию конфайнмента [17], среднее линии Полякова равно нулю в фазе конфайнмента, т.е. свободная энергия уединенного заряда бесконечна, а в Кулоновской фазе – отлично от нуля. Таким образом, данная величина является параметром порядка фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент и позволяет различать нарушение глобальной симметрии относительно центра Z_N калибровочной группы $SU(N)$. Действительно, калибровочные преобразования удовлетворяющие условию $U(t + \beta, \mathbf{x}) = zU(t, \mathbf{x})$,

где $z = \exp(i2\pi n/N) \in Z_N$, не изменяют периодические граничные условия на калибровочные поля в функциональном интеграле и, естественно, любые калибровочно-инвариантные объекты. При этом, они нетривиально преобразуют линию Полякова $\mathcal{P} \rightarrow z\mathcal{P}$. Поэтому, в отсутствие нарушения Z_N симметрии (фаза конфайнмента) $\langle \mathcal{P} \rangle = 0$, а в фазе деконфайнмента – это среднее не равно нулю и симметрия спонтанно нарушена. Свойства универсальности, присущие всем критическим явлениям [117, 118, 119], позволяют ожидать, что свойства фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент для системы на решетке должны быть аналогичны свойствам любой Z_N симметричной решеточной системы [71]. Однако непрерывный предел теории приводит к появлению ультрафиолетовых и инфракрасных сингулярностей требующих нетривиальной процедуры перенормировки. Поэтому вопрос о связи решеточной системы и непрерывной представляет собой серьезную теоретическую проблему.

Вычисление линии Полякова аналитическими методами в непрерывной теории достаточно затруднительно в виду отсутствия ее полной калибровочной инвариантности, но легко осуществимо численно на решетке. Мы ограничимся поэтому рассмотрением критерия конфайнмента Вильсона.

Перейдем к непосредственному вычислению петли Вильсона в фазе конфайнмента [120, 121]. В калибровке ФШ нулевая компонента калибровочного поля выражается в виде (3.27). Для произволь-

ного функционала F легко продемонстрировать, что

$$\langle F[A_0(\mathbf{x})] \rangle = \langle \int_x^R dy E_{\parallel}(y\hat{\mathbf{x}}) \rangle. \quad (6.4)$$

Чтобы получить это соотношение, запишем среднее в виде

$$F\left[\frac{\delta}{\delta J_0}\right] \Big|_0 e^{i \int_{\Lambda} d^4x A_0(\Phi - J_0)}.$$

Интегрируя по A_0 и выражая E_{\parallel} с помощью δ -функции, действительно имеем

$$\begin{aligned} & F\left[\frac{\delta}{\delta J_0}\right] \Big|_0 \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\Lambda} d^4x \left(E_{\parallel} - \frac{1}{x^2} \int_0^x y^2 dy J_0(y\hat{\mathbf{x}})\right)^2\right) \\ &= F\left[\int_x^R dy E_{\parallel}(y\hat{\mathbf{x}})\right] \exp\left(\frac{1}{2} \int_{\Lambda} d^4x E_{\parallel}^2\right). \end{aligned}$$

Наиболее удобный контур Γ состоит из двух прямых линий вдоль радиуса в некотором фиксированном направлении $\hat{\mathbf{x}}_0$ при временах $t = 0, T$, которые дают нулевой вклад благодаря калибровочному условию, и двух линий параллельных временной оси при радиусах $x = R', R''$, для которого можно написать

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\Gamma] = & \left\langle \text{Tr} \left[\left(\text{T exp} \int_0^T dt A_0(R'' \hat{\mathbf{x}}_0) \right)^{\dagger} \right. \right. \\ & \left. \left. \text{T exp} \int_0^T dt \left(A_0(R'' \hat{\mathbf{x}}_0) + \int_{R'}^{R''} dy E_{\parallel}(y\hat{\mathbf{x}}_0) \right) \right] \right\rangle. \quad (6.5) \end{aligned}$$

Для краткости далее будем опускать угловые координаты если это не затрудняет понимание формул. Пользуясь калибровочной инвариантностью выражения под следом, можно преобразовать переменные следующим образом

$$\begin{aligned} A_0 & \rightarrow A'_0 = U^{-1}(A_0 + g^{-1}\partial_t)U(t), \\ E_{\parallel} & \rightarrow E'_{\parallel} = U^{-1}E_{\parallel}U(t). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Из определения Т-экспоненты $\mathcal{P}[A_0](t) = T \exp \int_0^t dt' A_0(t')$, как решения следующего дифференциального уравнения,

$$\dot{\mathcal{P}}[A_0](t) = g A_0(t) \mathcal{P}[A_0](t), \quad \mathcal{P}[A_0](0) = \mathbf{1} \quad (6.7)$$

следует соотношение

$$\begin{aligned} & \mathcal{P} \left[A_0(R'') + \int_{R'}^{R''} dy E_{\parallel}(y) \right] (t) \\ &= \mathcal{P}[A_0(R'')](t) \mathcal{P} \left[\mathcal{P}[A_0(R'')]^{-1} \int_{R'}^{R''} dy E_{\parallel}(y) \mathcal{P}[A_0(R'')] \right]. \end{aligned} \quad (6.8)$$

При калибровочных преобразованиях (3.4) Т-экспонента преобразуется по закону

$$\mathcal{P}(t) \rightarrow \mathcal{P}'(t) = U^{-1}(0) \mathcal{P}(t) U(t). \quad (6.9)$$

Для проведения Гиббсовского усреднения воспользуемся формулой (5.55), которая позволяет заменить среднее произвольного функционала от E_{\parallel} средним функционала от сопряженной переменной λ с помощью дополнительного гауссова интегрирования по вспомогательной переменной ξ . При этом, попытаемся упростить вклад поверхностного члена, который, как мы показали должен быть взят с $\chi = 0$ в фазе конфайнмента. Интеграл по $A_0(R\hat{\mathbf{x}})$ дает поверхностную δ -функцию и мы можем записать статистическую сумму в виде

$$\begin{aligned} Z[0] &= \int \mathcal{D}\mathbf{A}_{\perp} \mathcal{D}\mathbf{E}_{\perp} e^{-W[\mathbf{A}_{\perp}, \mathbf{E}_{\perp}]} \delta(R^2 E_{\parallel}(R\hat{\mathbf{x}})) = \int \mathcal{D}\lambda \mathcal{D}\mathbf{A}_{\perp} \mathcal{D}\mathbf{E}_{\perp} \\ & e^{\int_{\Lambda} d^4x \left[\frac{1}{2}(\mathbf{E}_{\perp}^2 - \mathbf{B}^2) - \frac{1}{2}\lambda^2 + \lambda E_{\parallel} \right]} \delta(R^2 E_{\parallel}(R\hat{\mathbf{x}})) \delta(R^2 \lambda(R\hat{\mathbf{x}})). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Здесь мы использовали то, что добавление второй поверхностной δ -функции эквивалентно изменению нормировочной константы бла-

годаря наличию первой δ -функции. После того как мы учли ограничение на λ , снова представим первую δ -функцию в виде интеграла по $A_0(R\hat{\mathbf{x}})$, проинтегрируем по поперечным физическим переменным и получим представление в терминах эффективного действия коллективных переменных вида (5.35, 5.36). Таким образом, мы показали, что реально интегрирование производится лишь по полям обладающим дополнительным граничным условием на $\lambda(R\hat{\mathbf{x}})$. Следовательно, пространство интегрирования сопряженной переменной удовлетворяет тому же граничному условию, что и пространство \mathbf{E}_\perp . Вильсоновская петля будет выражаться через следующий функциональный интеграл

$$\begin{aligned} \mathcal{W}[\Gamma] = & \int \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\sigma \mathcal{D}\nu e^{-W[\sigma, \nu] - \frac{1}{2} \int_\Lambda d^4x \xi^2} \delta(R^2 \lambda(R\hat{\mathbf{x}})) \\ \text{tr } \mathcal{P} & \left[\mathcal{P}[\sigma(R'')]^{-1} \int_{R'}^{R''} dy (\lambda + i\xi)(y) \mathcal{P}[\sigma(R'')] \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Мы перешли в данной формуле к евклидовому времени с помощью замены $t \rightarrow it$, а “tr” обозначает след в фундаментальном представлении $SU(N)$, в отличие от “Tr”, который также подразумевает след в Гильбертовом пространстве. Заметим, что коэффициентные функции полей зависят от времени и, следовательно, T-экспонента не редуцируется к обычной.

Выражение (6.11) при конечных R, R', R'' является чрезвычайно сложным для проведения вычислений. Можно, однако, ожидать заметного его упрощения в пределе бесконечной системы $R \rightarrow \infty$, когда пара кварк–антикварк расположена бесконечно далеко от центра координат. Иными словами, нас интересует только асимптотическая энергия взаимодействия в пределе $R', R'' \rightarrow \infty, \Delta R =$

$R'' - R' = \text{const}$. Введем переменную φ с помощью соотношения

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{1}{x^2} \int_0^x y^2 dy \varphi(y\hat{\mathbf{x}}).$$

В силу условия конфинмента (6.1), поток электрического поля через бесконечно малый телесный угол на пространственной бесконечности в произвольном направлении равен нулю. В терминах фурье компонент базиса вида

$$f_{lmn}(k)[\mathbf{x}, t] = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{\sin kx}{kx} Y_{lm}(\hat{\mathbf{x}}) \exp(i2\pi n t/\beta)$$

функциональная δ -функция дает в рассматриваемом нами пределе условие

$$\tilde{\varphi}_{lmn}(k=0) = 0. \quad (6.12)$$

Величина фигурирующая в T -экспоненте при этом стремится к

$$\int_{R'}^{R''} dy \lambda_{lmn}(y) \rightarrow -(8\pi)^{1/2} \frac{\Delta R}{R' R''} \tilde{\varphi}_{lmn}(k=0), \quad (6.13)$$

и, следовательно, ее вкладом можно пренебречь. Легко понять, что выражение в данной формуле сильно осцилирует и сходимость является весьма медленной. Использование такого приближение в исходном интеграле по калибровочным полям дало бы лишь тривиальный результат, тем не менее, оно естественно в интеграле по коллективным переменным. Это обстоятельство имеет ту же причину, что и факт нетривиальности приближения стационарной фазы в последнем представлении функционального интеграла по сравнению с исходным. Коллективная переменная включает в своем определении усреднение по гауссовому шуму, и поэтому, в некотором смысле ее квантовые флуктуации дают менее значимый вклад.

Если пренебречь вкладом (6.13), выражение может быть существенно упрощено с помощью подбора специального калибровочного преобразования.

Произведем некоторое калибровочное преобразование, не изменив при этом величину следа (6.11). Вспомогательная переменная преобразуется однородно $\xi \rightarrow \xi' = U^{-1}\xi U(t)$. Действие для ξ не содержит производных по времени, так что сделаем замену переменных в интеграле $\xi \rightarrow \xi'$ (якобиан которой равен единице), не нарушая периодические граничные условия по времени. Убирая штрих в обозначении переменной интегрирования, получим исходное выражение, где $\mathcal{P}[A_0(R'')]$ преобразовано согласно формуле (6.9). Заметим также, что постоянное однородное преобразование выносится из под знака Т-экспоненты и пропадает в силу цикличности следа. Таким образом, мы показали, что Вильсоновская петля не изменяется при преобразовании затрагивающем только конструкцию $\mathcal{P}[A_0(R'')] \rightarrow \mathcal{P}' \equiv U^{-1}(t) \mathcal{P}[A_0(R'')]$. Так как $U(t)$ произвольно, можно добиться чтобы \mathcal{P}' было произвольным преобразованием зависящим от времени. Введем обозначение $\Xi = \int_{R'} dy \xi(y)$.

Справедлива следующая

Лемма. Для произвольной функции вида $\hat{\Xi}^a(t) = \Xi^a/|\Xi|$ существует такое калибровочное преобразование $U(t)$, которое делает соответствующий элемент калибровочной алгебры $\hat{\Xi} = \hat{\Xi}^a t^a$ не зависящим от времени.

Для доказательства достаточно показать, что для произвольного

нормированного вектора в цветовом пространстве группы $SU(N)$ всегда существует (вообще говоря не единственное) решение уравнения

$$\frac{d}{dt} \left(U^{-1}(t) \hat{\Xi}(t) U(t) \right) = 0. \quad (6.14)$$

Данное уравнение переписывается в виде

$$[V(t), \hat{\Xi}(t)] = \partial_t \hat{\Xi}(t), \quad V(t) = \partial_t U(t) U^{-1}(t). \quad (6.15)$$

Оно, очевидно, разрешимо относительно $V(t)$, и тогда $U(t)$ равно

$$U(t) = T \exp \int^t dt' V(t'). \quad (6.16)$$

После выбора такого преобразования, T -экспонента редуцируется к обычной экспоненте. Чтобы избавиться от векторной структуры, применим дополнительное глобальное преобразование, так чтобы вектор $\hat{\Xi}$ принадлежал Картановской подалгебре. Благодаря диагональности Картановских генераторов, след, а затем и гауссов интеграл, легко вычисляются

$$\mathcal{W}[\Gamma] = \int \prod_{\alpha=1}^{N-1} \mathcal{D}\xi^\alpha e^{-\frac{1}{2} \int_\Lambda d^4x (\xi^\alpha)^2} \sum_{i=1}^N \exp \left[\sum_{\alpha=1}^{N-1} (j \bullet \xi^\alpha) \lambda_i^{(\alpha)} \right], \quad (6.17)$$

$$j(x) = \frac{ig}{2} \theta(0 \leq t \leq T) \frac{\theta(R' \leq x \leq R'')}{x^2} \delta(\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{x}}_0), \quad (6.18)$$

приводя к результату

$$\mathcal{W}[\Gamma] = \sum_{i=1}^N \exp \left[- \sum_{\alpha=1}^{N-1} (\lambda_i^{(\alpha)})^2 \chi_0 S \right], \quad (6.19)$$

где $\left\{ \lambda_i^{(\alpha)} \equiv (\lambda^\alpha)_{ii}, (\alpha = 1, \dots, N-1) \right\}$ – элементы диагональных генераторов в фундаментальном представлении $SU(N)$. Матрицы генераторов нормированы следующим образом

$$\text{tr}(\lambda^a \lambda^b) = 2\delta^{ab}. \quad (6.20)$$

Условие (6.20) можно формально представить в терминах N -мерных векторов $\lambda^{(\alpha)}$, если ввести дополнительный вектор с компонентами

$$\lambda^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \underbrace{(1, \dots, 1)}_N, \quad (6.21)$$

как условие ортонормированности N -мерного базиса $\{\lambda^{(0)}, \lambda^{(\alpha)}/\sqrt{2}\}$. Условие полноты такого базиса дает

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} \lambda_i^{(\alpha)} \lambda_j^{(\alpha)} = 2 \left(\delta_{ij} - \lambda_i^{(0)} \lambda_j^{(0)} \right). \quad (6.22)$$

Сумма в (6.19) легко вычисляется с помощью последнего соотношения

$$\sum_{\alpha=1}^{N-1} (\lambda_i^{(\alpha)})^2 = 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right). \quad (6.23)$$

Объединяя предыдущие результаты, мы получаем закон площадей

$$\mathcal{W}_{SU(N)}[\Gamma] = N e^{-\chi_{SU(N)} S}, \quad (6.24)$$

с коэффициентом натяжения струны равным

$$\chi_{SU(N)} = 2 \left(1 - \frac{1}{N} \right) \chi_0. \quad (6.25)$$

Постоянная χ_0 содержит ультрафиолетовые и инфракрасные расходимости:

$$\chi_0 = \frac{g^2 \delta(\hat{0})}{8 R' R''}, \quad \delta(\hat{0}) = \sum_l \frac{(2l+1)}{4\pi}, \quad (6.26)$$

но она имеет такую же структуру как квадрат температуры T_c фазового перехода конфайнмент-деконфайнмент. Формула (6.26) выражается через голые параметры теории и требует применения

процедуры перенормировки, которая однако затруднительна в нековариантных калибровках.

Для группы $SU(2)$ для безразмерной комбинации $\xi \equiv T_c/\sqrt{\chi}$ получаем следующую формулу

$$\xi^2 = \frac{a_c 8R^3}{\pi^2 V_R} = \frac{6}{\pi^2} a_c. \quad (6.27)$$

С учетом формулы (5.72), численное значение равно $\xi \simeq 0.71$ и находится в качественном согласии с результатом полученным из Монте–Карловских симуляций в решеточной теории [76], которое равно 0.69 ± 0.02 . Плотность свободной энергии теперь может быть переписана в терминах натяжения струны как

$$\mathcal{F}_R[a_R] = \frac{54 \pi}{g^2 \beta^2} \chi_0 F_R\left(\frac{\pi^3}{6 \beta^2 \chi_0}\right), \quad (6.28)$$

что подчеркивает непертурбативный характер рассмотренного нами приближения. Вычисление петли Вильсона в фазе деконфайнмента гораздо более сложно из-за отсутствия δ -функции позволившей фактически избавиться от самого сложного функционального интегрирования.

7. Заключение

В заключение сформулируем основные результаты, полученные в диссертации:

1. Построена формулировка неабелевой калибровочной теории в 3-х мерной калибровке Фока–Швингера. Предложено обобщение данной калибровки на класс калибровок, называемых нами обобщенными калибровками Фока–Швингера, для которых по-прежнему точно разрешима связь Гаусса и калибровочное поле связано с полем напряженности линейным дифференциальным соотношением.

2. Изучен вопрос о группе остаточных калибровочных преобразований, допускаемых данными калибровками, и выборе граничных условий фиксирующих такой произвол. Получены явные формулы связи полей в данных калибровках с полями в произвольной калибровке. Эти формулы подробно проанализированы на примере калибровки Кулона в абелевой теории, и позволяют, например, получить простое представление для свободного пропагатора в калибровке Фока–Швингера.

3. Показано, что среди калибровок рассматриваемого нами класса, существует предпочтительная для рассмотрения динамики в компактной области, вид которой согласован с полем нормалей к границе области. Такая калибровка приводит к существенному упрощению поверхностных членов. Построен гамильтонов формализм для теории Янга–Миллса в конечной области, позволяющий учитывать переменные на границе как равноправные гамильтоно-

вы переменные и вклад поверхностных членов, формальное пренебрежение которыми в стандартном подходе является незаконным и приводит к потере существенных физических эффектов. Любые граничные условия в данном формализме рассматриваются как дополнительные связи. Допустимость того или иного граничного условия определяется условиями его сохранения динамикой системы в конечной области.

4. Построена формулировка теории Янга–Миллса в обобщенных калибровках Фока–Швингера в формализме “переменных на бесконечности”, предложенном Моркио и Строкки в рамках алгебраической КТП [98, 99, 100]. Этот формализм позволяет построить корректный предел динамики системы в бесконечном объеме как группы автоморфизмов расширенной алгебры наблюдаемых с нетривиальным центром. Последний генерируется слабыми пределами делокализованных переменных, называемых переменными на бесконечности. Получена нетривиальная динамика переменных на бесконечности в теории Янга–Миллса, что является существенным для механизма конфайнмента. В пределе системы бесконечного размера формализм пункта 3 переходит в данный, и таким образом устанавливается их эквивалентность. Отметим, что первый полезен для практических вычислений, например, термодинамических величин при конечной температуре и используется далее в диссертационной работе, в то время как последний имеет большую ценность для анализа явлений спонтанного нарушения симметрии, глобальной структуры пространства состояний предельной системы, а также более удобен в аксиоматической теории поля для

строгого доказательства общих результатов. Кратко рассмотрена реализация алгебры Пуанкаре в калибровке Фока–Швингера.

5. Основным достижением диссертации является проведенный анализ зависимости статистической суммы неабелевой калибровочной теории от граничного значения продольной компоненты электрического поля, которая в силу закона Гаусса в данной калибровке совпадает с потоком электрического поля через бесконечно малый элемент границы, и установление связи такой зависимости с механизмом фазового перехода конфайнмент–деконфайнмент.

6. Анализ неабелевой теории предваряется рассмотрением более простой задачи о квантовой электродинамике с внешней плотностью заряда в сферической области при конечной температуре, где зависимость стат. суммы от граничной переменной вычисляется точно. Результат говорит о том, что в случае плотности заряда, соответствующей линейно растущему потенциалу, который моделирует ситуацию конфайнмента, поверхностные эффекты приводят к конечной поправке, уменьшающей плотность свободной энергии. Следовательно, тенденция к конфайнменту является статистически предпочтительным эффектом.

7. Предложена формулировка квантовой глюодинамики в терминах функционального интеграла по коллективным переменным, сопряженным продольным компонентам хромо- электрического и магнитного полей. При этом интеграл по самим калибровочным полям точно вычисляется в калибровке Фока–Швингера. Таким образом, производящий функционал теории представлен в терминах переменных преобразуемых однородно под действием калибро-

вочных преобразований. Вычислено эффективное действие (плотность свободной энергии) $SU(2)$ и $SU(3)$ глюодинамики в приближении среднего поля для коллективных переменных. Анализ минимумов свободной энергии обнаружил фазовый переход при некоторой температуре, ниже которой среднее значение коллективных переменных отлично от нуля.

8. Установлено, что последний переход может интерпретироваться как фазовый переход конфайнмент–деконфайнмент. В фазе конфайнмента поток хромо-электрического поля через произвольный элемент границы равен нулю, что является условием синглетности относительно группы остаточных калибровочных преобразования, и физически означает невозможность наблюдения цветных объектов на пространственной бесконечности (в асимптотических состояниях).

9. Показано, что наше условие конфайнмента удовлетворяет традиционным критериям конфайнмента. Во-первых, показано, что в фазе конфайнмента Вильсоновская петля для $SU(N)$ теории удовлетворяет закону площадей. Отношение температуры фазового перехода к корню из коэффициента натяжения струны не содержит в себе расходимостей и, несмотря на грубость приближения использованного при вычислении температуры фазового перехода (теория среднего поля, отсутствие последовательной процедуры перенормировки), находится в качественном согласии с результатом полученным с помощью метода Монте–Карло в вычислениях в решеточной теории.

10. Показано, что в фазе деконфайнмента глобальная Z_N -

симметрия относительно центра группы $SU(N)$ спонтанно нарушена поверхностными членами. Фаза конфайнмента характеризуется ненарушенной симметрией. В этой фазе все нетривиальные минимумы эффективного действия имеют одинаковую глубину и преобразуются друг в друга действием Z_N преобразований, что позволяет ожидать структуру основного состояния теории аналогичную θ -вакууму.

Автор хотел бы горячо поблагодарить своего научного руководителя Н.А. Свешникова за выбор интересной проблемы, постоянное внимание к работе, полезные творческие советы, критические замечания и плодотворное сотрудничество.

Глубокую благодарность я хотел бы также принести В.О. Соловьеву за активный интерес к данной проблеме и многочисленные важные дискуссии, Б.А. Арбузову, Э.Э. Боосу, А.С. Вшивцеву, В.А. Ильину, Г.С. Ирошникову, Д.Д. Казакову, Ю.А. Кузнецову, В.А. Петрову, В.Е. Рочеву, А.П. Самохину, В.В. Скалозубу, А.А. Славнову, Ф.В. Ткачеву и А.М. Широкову за полезные обсуждения и ценные замечания.

Автор благодарит проф. К.А. Довсона (UCD, Dublin) за поддержку при написании работы и полезные обсуждения.

Автор искренне признателен В.И. Саврину, а также другим сотрудникам отдела теоретической физики высоких энергий НИИЯФ МГУ за многочисленные ценные советы и постоянную поддержку.

8. Приложения

Приложение А. Глюонный пропагатор калибровки ФШ

Рассмотрим пропагатор в калибровке Фока-Швингера

$$D_{FS}^{ij}(x, y) = -i \langle 0 | T_D (A_{\perp}^i(x) A_{\perp}^j(y)) | 0 \rangle .$$

После переыражения через Кулоновские поля с использованием алгебраических свойств (2.30,2.31) можно вывести представление

$$D_{FS}^{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}; x_0, y_0) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-i k_0 (x_0 - y_0)}}{(k^2 + i 0)} \left[\delta^{ij} e^{i \mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{y})} - \frac{\partial}{\partial x_i} x^j \frac{e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} - 1}{i \mathbf{k} \mathbf{x}} - \frac{\partial}{\partial y_j} y^i \frac{e^{-i \mathbf{k} \mathbf{y}} - 1}{-i \mathbf{k} \mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial x_i} x^l \frac{\partial}{\partial y_j} y^l \frac{e^{i \mathbf{k} \mathbf{x}} - 1}{i \mathbf{k} \mathbf{x}} \frac{e^{-i \mathbf{k} \mathbf{y}} - 1}{-i \mathbf{k} \mathbf{y}} \right] .$$

Благодаря граничному условию на калибровочное поле в нуле, этот пропагатор хорошо определен, в то время как пропагатор аксиальной калибровки имеет неприятный двойной полюс. Несмотря на многие черты сходства рассматриваемой нами калибровки с аксиальной, у последней существуют серьезные проблемы с граничными условиями [122].

Приложение Б. Группа SU(2): анзац общего вида

Общая формула для плотности свободной энергии в терминах безразмерных параметров имеет вид

$$F[\vec{s}, \vec{v}] = -a \vec{v}^2 + \mathcal{U}[\vec{s}, \vec{v}] , \quad (8.1)$$

$$\mathcal{U}[\vec{s}, \vec{v}] = \sum_n \int_0^\infty \frac{dv}{\pi} \log \det C[\vec{s}, \vec{v}], \quad (8.2)$$

$$C^{ab}[\vec{s}, \vec{v}] = \delta^{ab} (v^2 + n^2) + i t^{abc} (2ns^c + v^c) + t^{acd} t^{bed} s^c s^e. \quad (8.3)$$

С помощью цветового преобразования легко добиться следующей параметризации

$$\vec{s} = (0, 0, s), \quad \vec{v} = (v_\perp, 0, v_\parallel).$$

Детерминант тогда равен

$$\det C = X^3 + 2s^2 X^2 + (s^4 - \vec{v}^2 - 4ns v_\parallel) X - v_\perp^2 s^2 \quad (8.4)$$

с $X = v^2 + n^2$.

Обозначим через γ_a ($a = 1, 2, 3$) корни правой части (8.4) по X , которые будут изучены чуть ниже. Формула

$$\int_0^\infty \frac{dv}{\pi} \log\left(1 + \frac{a}{v^2}\right) = a^{1/2} \quad (8.5)$$

позволяет записать функцию (8.3) как

$$\operatorname{Re} \mathcal{U}[s, \vec{v}] = \sum_n \left[\sum_{a=1}^3 (n^2 - \gamma_a[s, \vec{v}, n])_+^{1/2} - 3 |n| \right] - \frac{1}{2}, \quad (8.6)$$

$$\operatorname{Im} \mathcal{U}[s, \vec{v}] = \sum_n \sum_{a=1}^3 (\gamma_a[s, \vec{v}, n] - n^2)_+^{1/2}. \quad (8.7)$$

Благодаря периодичности и четности \mathcal{U} по s можно рассматривать ее на полупериоде $0 \leq s \leq 1/2$. Сразу же необходимо исключить область в которой существует мнимая часть. Очевидно, что она отлична от нуля, если

$$\gamma_a[s, \vec{v}, 0] > 0.$$

Поэтому, найдем когда уравнение

$$x^2 + 2s^2 x + s^4 - \vec{v}^2 = \frac{v_{\perp}^2 s^2}{x} \quad (8.8)$$

допускает положительные или комплексные решения (см. Рис. 5).

Легко видеть, что нижняя ветвь гиперболической кривой $2''$ пересекает параболу 1 в двух точках, давая действительные отрицательные корни γ_2, γ_3 . Важно подчеркнуть следующее обстоятельство. Как только $v_{\perp} \neq 0$, верхняя ветвь гиперболы $2'$ пересекается с параболой в положительной точке γ_1 , приводя к нестабильности. Благодаря этому общий случай $v_{\perp} \neq 0$ не представляет какого-либо интереса.

Рисунок 5 достаточно информативен и даже позволяет увидеть стабильный минимум $F[\vec{s}, \vec{v}]$. Эта функция тем меньше, чем больше $|\vec{v}|$, а $|\gamma_a|$ — наоборот больше. Отрицательность накладывает дополнительное ограничение $\vec{v}^2 \leq s^4$, которое насыщается при $|\vec{v}| = v_{\parallel} = s^2 = \frac{1}{4}$.

Приложение В. Некоторые формулы со специальными функциями

Суммирование по Пуассону

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(2\pi k) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{-ik\tau} f(\tau).$$

Интегралы с цилиндрическими функциями [123]

$$\int_0^{\infty} dy \frac{\cos(ky)}{(y^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}} = K_0(kv), \quad - \int_v^{\infty} dy \frac{\cos(ky)}{(y^2 - v^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\pi}{2} Y_0(kv),$$

$$\int_0^u v dv K_0(kv) = \frac{1}{k^2}(-ku K_1(ku) + 1),$$

$$\frac{\pi}{2} \int_0^u v dv Y_0(kv) = \frac{1}{k^2}\left(\frac{\pi}{2}ku Y_1(ku) + 1\right).$$

Представление Гурвица обобщенной ζ -функции [124] справедливо при $\operatorname{Re} s < 0$

$$\zeta(s, v) = 2(2\pi)^{s-1} \Gamma(1-s) \sum_{k=1}^{\infty} k^{s-1} \sin(2\pi kv + \pi s/2).$$

Мы используем периодическое продолжение ζ -функции с помощью этой формулы и обозначаем ее ζ_H . Для любого целого k

$$\zeta_H\left(-\frac{1}{2}, k\right) = -\frac{\zeta(3/2)}{4\pi}, \quad \zeta_H\left(-\frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) = (1 - 1/\sqrt{2}) \frac{\zeta(3/2)}{4\pi}.$$

Литература

- [1] D. Cutts et al, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 41, p. 363, 1978.
- [2] L. Lyons, preprint 38/80, Oxford Univ. Nucl. Phys. Lab., 1980.
- [3] V.N. Gribov, “Orsay lectures on confinement,” preprint 92/60, 94/20, LPTHE, Orsay.
- [4] C.N. Yang, R.L. Mills, *Phys. Rev.*, vol. 69, p. 191, 1954.
- [5] H. Fritzsch, M. Gell-Mann, H. Leutwyler, *Phys. Lett.*, vol. B 74, p. 365, 1973.
- [6] S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 31, p. 494, 1973.
- [7] D.J. Gross, F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, p. 1343, 1973.
- [8] H.D. Politzer, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 30, p. 1346, 1973.
- [9] S. Coleman, D.J. Gross, *Phys. Rev. Lett.*, vol. 31, p. 851, 1973.
- [10] W. Marciano, H. Pagels, *Phys. Rep.*, vol. 36, p. 137, 1978.
- [11] A.J. Buras, *Rev. Mod. Phys.*, vol. 52, p. 199, 1980.
- [12] S. Mandelstam, *Phys. Rep.*, vol. 67, p. 109, 1980.
- [13] M. Bander, *Phys. Rep.*, vol. 75, no. 4, p. 205, 1981.
- [14] G.’t Hooft, *Nucl. Phys.*, vol. B 75, p. 461, 1974.
- [15] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.*, vol. B 59, p. 82, 1975.

- [16] A.M. Polyakov, *Phys. Lett.*, vol. B 72, p. 477, 1978.
- [17] A.M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*. Chur: Harwood Acad. Publ., 1987.
- [18] I.I. Kogan, A. Kovner, “Compact QED_3 - a simple example of a variational calculation in a gauge theory.,” preprint UMN-TH-1317-94, TPI-MINN-94/37-T, hep-th@xxx/9410067.
- [19] M.G. Amaral, M.E. Pol, *J. Phys.*, vol. G 16, p. 1, 1990.
- [20] C. Itzykson, J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*. McGraw-Hill, USA, 1980.
- [21] T.-P. Cheng, L.-F. Li, *Gauge theories of elementary particles physics*. Clarendon Press, Oxford, 1984.
- [22] Y. Nambu, *Phys. Rev.*, vol. D 10, p. 4262, 1974.
- [23] M. Jacob, ed., *Dual theory*. North-Holland, Amsterdam, 1974.
- [24] S. Mandelstam, *Phys. Rep.*, vol. C 23, p. 245, 1976.
- [25] S. Mandelstam, in *In: Proc. 1979 Int. Sym. on Lepton and Photon Interactions at High Energies*, Fermilab, Batavia, Illinois, 1979, (H. T.B.W. Kirk, ed.).
- [26] G.’t Hooft, *Nucl. Phys.*, vol. B 79, p. 276, 1976.
- [27] G.’t Hooft, *Nucl. Phys.*, vol. B 153, p. 141, 1979.
- [28] S. Mandelstam, *Phys. Rev.*, vol. D 19, p. 2391, 1979.

- [29] S. Maedan, Y. Matsubara, T. Suzuki, *Progr. Theor. Phys.*, vol. 84, no. 1, p. 130, 1990.
- [30] H. Monden et al, *Phys. Lett.*, vol. B 294, p. 100, 1992.
- [31] T. Suzuki, *Phys. Rev. (Proc. Suppl.)*, vol. B 30, p. 276, 1993.
- [32] G. Savvidy, *Phys. Lett.*, vol. B 71, p. 133, 1977.
- [33] S.G. Matinyan, G. Savvidy, *Nucl. Phys.*, vol. B 134, p. 539, 1978.
- [34] N.K. Neilson, P. Olesen, *Nucl. Phys.*, vol. B 144, p. 376, 1978.
- [35] H.B. Neilson, M. Ninomiya, *Nucl. Phys.*, vol. B 156, p. 1, 1979.
- [36] J. Ambjørn, N.K. Neilson, P. Olesen, *Nucl. Phys.*, vol. B 152, p. 75, 1979.
- [37] H.B. Neilson, P. Olesen, *Nucl. Phys.*, vol. B 160, p. 380, 1979.
- [38] Yu.A. Simonov, *Nucl. Phys.*, vol. B 307, p. 512, 1988.
- [39] G.G. Callan, R.F. Dashen, D.J. Gross, *Phys. Rev.*, vol. D 17, p. 2717, 1978.
- [40] G.G. Callan, R.F. Dashen, D.J. Gross, *Phys. Rev.*, vol. D 19, p. 1826, 1979.
- [41] G.G. Callan, R.F. Dashen, D.J. Gross, *Phys. Rev.*, vol. D 20, p. 3279, 1979.
- [42] E. Witten, *Nucl. Phys.*, vol. B 149, p. 285, 1979.

- [43] S. Mandelstam, *Phys. Rev.*, vol. D 20, p. 3223, 1979.
- [44] R. Anishetty, M. Baker, J.S. Ball et al, *Phys. Lett.*, vol. B 86, p. 52, 1979.
- [45] J.S. Ball, F. Zach, *Phys. Lett.*, vol. B 95, p. 273, 1980.
- [46] R. Oehme, *Phys. Lett.*, vol. B 232, p. 489, 1989.
- [47] R. Oehme, *Phys. Rev.*, vol. D 42, p. 4209, 1990.
- [48] R. Oehme, *Mod. Phys. Lett.*, vol. 8, p. 1533, 1993.
- [49] A. A. Migdal, *Phys. Rep.*, vol. 102, no. 4, p. 199, 1983.
- [50] Yu. Makeenko, A.A. Migdal, *Phys. Lett.*, vol. B 88, p. 135, 1979.
- [51] J.L. Gervais, A. Neveu, *Phys. Lett.*, vol. B 80, p. 255, 1979.
- [52] Г.С. Ирошников, *ЖЭТФ*, т. 97, с. 424, 1990.
- [53] Г.С. Ирошников, *ЖЭТФ*, т. 100, с. 45, 1991.
- [54] G.'t Hooft, *Nucl. Phys.*, vol. B 72, p. 461, 1974.
- [55] E. Witten, *Nucl. Phys.*, vol. B 160, p. 57, 1979.
- [56] T. Kugo, I. Ojima, *Progr. Theor. Phys.*, vol. 66, p. 1, 1979.
- [57] T. Kugo, I. Ojima, *Progr. Theor. Phys.*, vol. 60, no. 6, p. 1869, 1978.
- [58] T. Kugo, I. Ojima, *Progr. Theor. Phys.*, vol. 61, no. 2, p. 644, 1979.

- [59] H. Hata, I. Niigata, *Nucl. Phys.*, vol. B 389, p. 133, 1993. hep-th/9405145.
- [60] M. Shintani, *Phys. Lett.*, vol. B 137, p. 220, 1984.
- [61] T. Kugo, I. Ojima, *Progr. Theor. Phys.*, vol. 61, p. 294, 1979.
- [62] K. Wilson, *Phys. Rev.*, vol. D 10, p. 2445, 1974.
- [63] J. Kogut, L. Susskind, *Phys. Rev.*, vol. D 11, p. 395, 1975.
- [64] L. Susskind, *Phys. Rev.*, vol. D 20, p. 2610, 1979.
- [65] M. Creutz, *Phys. Rev.*, vol. D 21, no. 8, p. 2308, 1980.
- [66] L. McLerran, B. Svetitsky, *Phys. Lett.*, vol. B 98, p. 195, 1981.
- [67] K. Kuti, J. Polonyi, K. Szlachanyi, *Phys. Lett.*, vol. B 98, p. 199, 1981.
- [68] J. Engels, F. Karsch, H. Satz et al, *Phys. Lett.*, vol. B 101, p. 89, 1981.
- [69] J. Engels, F. Karsch, H. Satz, *Nucl. Phys.*, vol. B 205, p. 545, 1982.
- [70] E. Marinari, *Phys. Rep.*, vol. 184, no. 2-4, p. 131, 1989.
- [71] B. Svetitsky, *Phys. Rep.*, vol. 132, no. 1, p. 1, 1986.
- [72] B. Svetitsky, L. Yaffe, *Nucl. Phys.*, vol. B 210, no. [FS6], p. 423, 1982.

- [73] B. Svetitsky, L. Yaffe, *Phys. Rev.*, vol. D 26, p. 963, 1982.
- [74] S. Jacobs, M. G. Olson, C. Suchyta III, *Phys. Rev.*, vol. D 33, p. 3338, 1986.
- [75] E. Marinari, *Nucl. Phys. (Proc. Suppl.)*, vol. B, no. 9, p. 209, 1989.
- [76] F. Karsch, “Deconfinement and chiral symmetry restoration on the lattice,” in *QCD 20 Years Later*, 9-13 Jun 1992, Aachen, (P.M. Zerwas, H.A. Kastrup, ed.), pp. 717–747, World Scientific, Singapore, 1993.
- [77] I.I. Kogan, A. Kovner, “A variational approach to the QCD wave functional: Dynamical mass generation and confinement.,” preprints LA-UR-94-2727, PUPT-1492, hep-th@xxx/9408081.
- [78] Н.А. Свешников, 1995, (не опубликовано).
- [79] A. Khvedelidze, V. Pervushin, “Zero mode of Gauss constraint in gaugeless reduction of Yang–Mills theory,” preprint JINR E2-94-332.
- [80] F.A. Lunev, *Phys. Lett.*, vol. B 295, p. 99, 1992.
- [81] M. Lavelle, D. McMullan, “On quark confinement,” preprints MZ-TH/93-03, DIAS-STP-93-04.
- [82] K.J. Dahlem, *Z. Phys.*, vol. C 29, p. 553, 1985.
- [83] J.E. Mandula, *Phys. Lett.*, vol. B 210, p. 117, 1988.

- [84] R. Anishetti, *J. Phys.*, vol. G 10, p. 423, 1984.
- [85] V.M. Belyaev, V.L. Eletzky, *Z. Phys.*, vol. C 45, p. 355, 1990.
- [86] K. Enqvist, K. Kajantie, *Z. Phys.*, vol. C 47, p. 291, 1990.
- [87] J. Polonyi, S. Vazques, *Phys. Lett.*, vol. B 240, p. 183, 1990.
- [88] V.M. Belyaev, *Phys. Lett.*, vol. B 254, p. 153, 1991.
- [89] В.В. Скалозуб, preprint ИТР-92-12Е, Инст. Теор. Физ., Киев, 1992.
- [90] V. A. Fock, *Sov. Phys.*, vol. 12, no. HEFT 4, p. 404, 1937.
- [91] J. Schwinger, *Phys. Rev.*, vol. 82, p. 664, 1951.
- [92] L. Durand, E. Mendel, *Phys. Rev.*, vol. D 26, p. 1368, 1982.
- [93] M. Shifman, *Nucl. Phys.*, vol. B 173, p. 13, 1980.
- [94] D. Shütte, *Phys. Rev.*, vol. D 40, p. 2090, 1989.
- [95] N.A. Sveshnikov, E.G. Timoshenko, *Phys. Lett.*, vol. B 289, p. 423, 1992.
- [96] N.A. Sveshnikov, E.G. Timoshenko, “Confinement phase transition mechanism of SU(2)-gluodynamics,” preprint 91-140, IHEP, Serpukhov, 1991.
- [97] E.G. Timoshenko, “Dynamics of gauge fields in finite domain,” in *VIII Workshop on High Energy Physics and QFT*, 17-23 Sep

- 1993, Zvenigorod, (B.B. Levchenko, ed.), (Moscow), pp. 213–217,
NPI MSU, MSU Publishing Co., 1994.
- [98] G. Morchio, F. Strocchi, *Commun. Math. Phys.*, vol. 99, p. 153,
1985.
- [99] G. Morchio, F. Strocchi, *J. Math. Phys.*, vol. 28, no. 8, p. 1912,
1987.
- [100] G. Morchio, F. Strocchi, *J. Math. Phys.*, vol. 28, no. 3, p. 622,
1987.
- [101] В.Е. Захаров, *Прокл. Мех. Техн. Физ.*, т. 3, с. 86, 1968.
- [102] V.S. Buslaev, L.D. Faddeev, L.A. Takhtajan, *Phys.*, vol. D 18,
p. 255, 1986.
- [103] D. Lewis, J. Marsden, R. Montgomery and T. Ratiu, *Physica*,
vol. D 18, p. 391, 1986.
- [104] T. Regge, C. Teitelboim, *Ann. Phys. (N.Y.)*, vol. 88, p. 286, 1974.
- [105] V.O. Soloviev, *Phys. Lett.*, vol. B 292, p. 30, 1992.
- [106] A.P. Balachandran, G. Bimonte, K.S. Gupta, A. Stern, *Int. J.*
Mod. Phys., vol. A 7, p. 4655, 1992.
- [107] V.O. Soloviev, *J. Math. Phys.*, vol. 34, p. 5747, 1993.
- [108] A. A. Kirillov, *Elements of the theory of representations*. NY:
Springer, 1976.

- [109] G.G. Emch, *Algebraic methods in Statistical Mechanics and Quantum Field Theory*. Wiley–Interscience, 1972.
- [110] O. Brateli, D.W. Robinson, *Operator Algebras and Quantum Statistical Mechanics*. Vol. 1,2, N. Y.: Springer Verlag, 1979, 1981.
- [111] P. Bona, *J. Math. Phys.*, vol. 30, no. 12, p. 2994, 1989.
- [112] P. Besting, D. Schütte, *Phys. Rev.*, vol. D 42, p. 594, 1990.
- [113] N.A. Sveshnikov, E. G. Timoshenko, “Boundary effects in the gauge field theories at finite temperature,” 1995. *Int. J. Mod. Phys.*, (to be published).
- [114] J. Glimm, A. Jaffe, *Quantum Physics. A functional Integral Point of View*. N. Y.: Springer–Verlag, 1981.
- [115] N.A. Sveshnikov, E.G. Timoshenko, “Confinement phase transition mechanism in gluodynamics,” preprint 92-31, IHEP, Serpukhov, 1992.
- [116] M. Mezard, G. Parisi, M.A. Virasoro, *Spin Glass Theory and Beyond*. Singapore: World Scientific, 1987.
- [117] J.J. Binney, N.J. Dowrick, A.J. Fisher, M.E. Newman, *The theory of critical phenomena*. Clarendon Press, Oxford, 1992.
- [118] C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*. Cambridge Univ. Press, 1989.

- [119] D.J. Amit, *Field Theory, Renormalisation Group and Critical Phenomena*. World Scientific, Singapore, 1978.
- [120] Э.Г. Тимошенко, *Ядерная Физика*, т. 56, N. 11, с. 277, 1993.
- [121] E.G. Timoshenko, “Wilson Loop for SU(N)-gluodynamics,” preprint 92-17/266, NPI MSU, Moscow, 1992.
- [122] A. Basseto, I. Lazzizzera, R. Soldati, *Nucl. Phys.*, vol. B 236, p. 319, 1984.
- [123] А.П. Прудников, Ю.А. Брычков, О.И. Маричев, *Интегралы и ряды..* Vol. 1. Специальные функции., Москва: Наука, 1983.
- [124] H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*. Vol. 1, MC Graw–Hill, 1953.
- [125] N.A. Sveshnikov, E.G. Timoshenko, *Problems on High Energy Physics and Field Theory – Proceedings of the XV Workshop*, IHEP, Protvino, 1995, с. 162.
- [126] E.G. Timoshenko, *Problems on High Energy Physics and Field Theory – Proceedings of the XV Workshop*, IHEP, Protvino, 1995, с. 169.

Figures

Figure Captions

Рис. 1 Зависимость действительной части эффективного потенциала от u и s при $a = 0.01$.

Рис. 2 Зависимость мнимой части эффективного потенциала от u и s .

Рис. 3 График зависимости $\text{Re } F$ от u при фиксированных s в момент фазового перехода ($s = 0, a = 0.38, s = 0.5, a = 2$).

Fig. 1

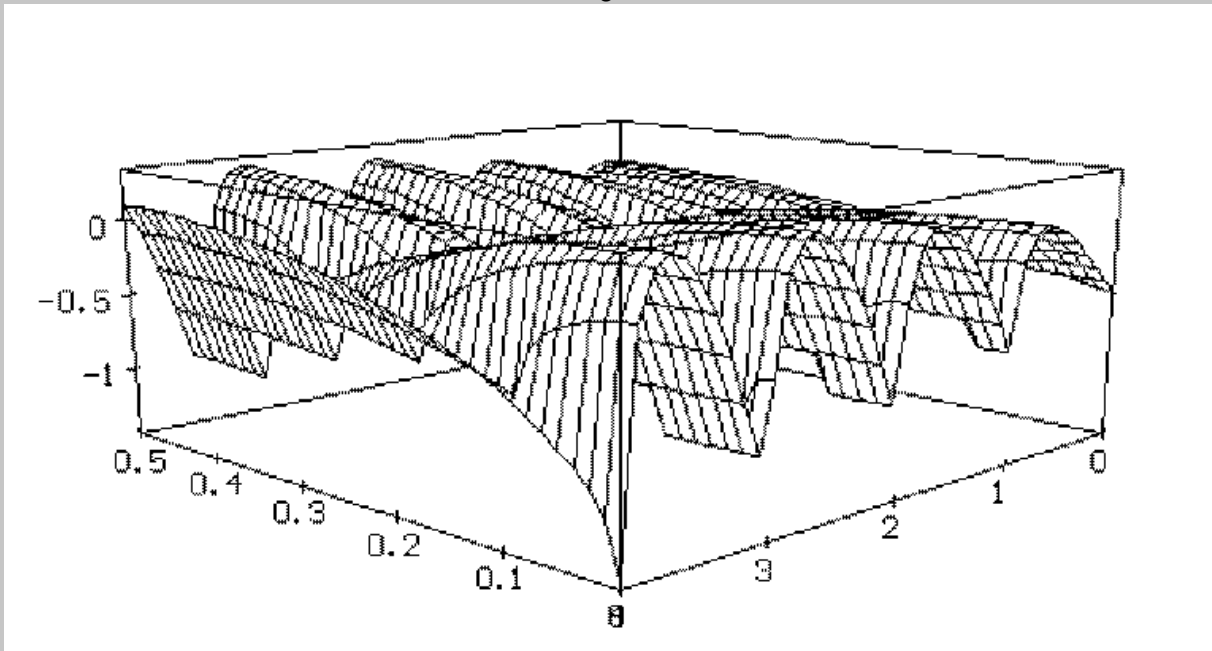


Fig. 2

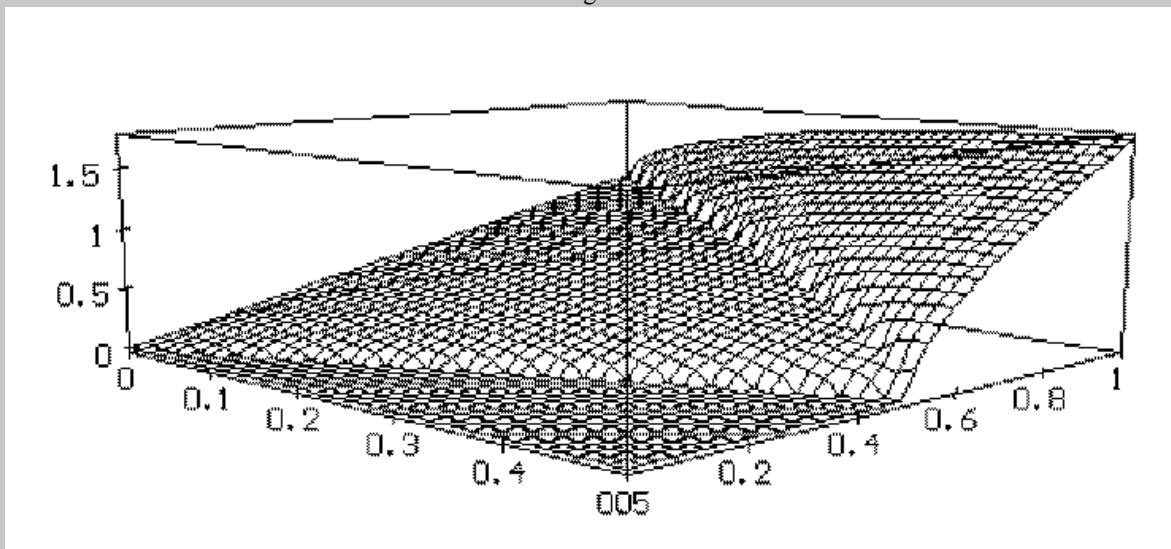


Fig. 3

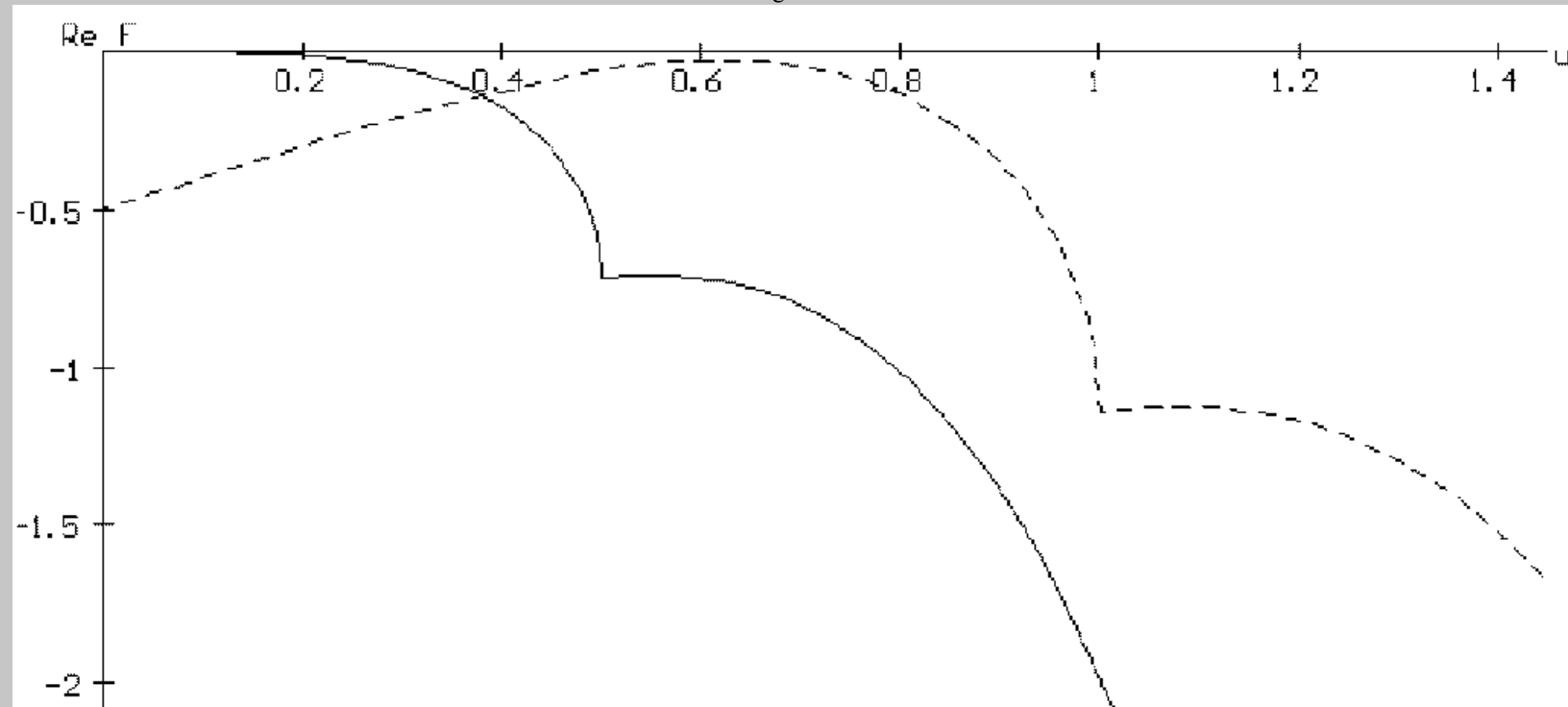


Fig. 4

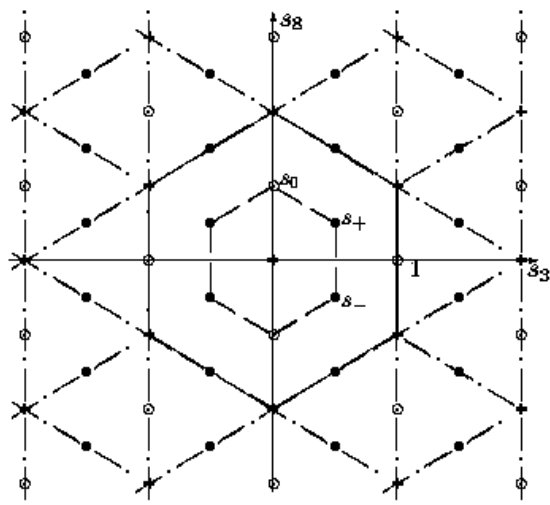


Рис. 4

Минимумы эффективного действия $SU(3)$ глюодинамики в терминах переменной $s = g\beta\sigma/(2\pi)$.

Fig. 5

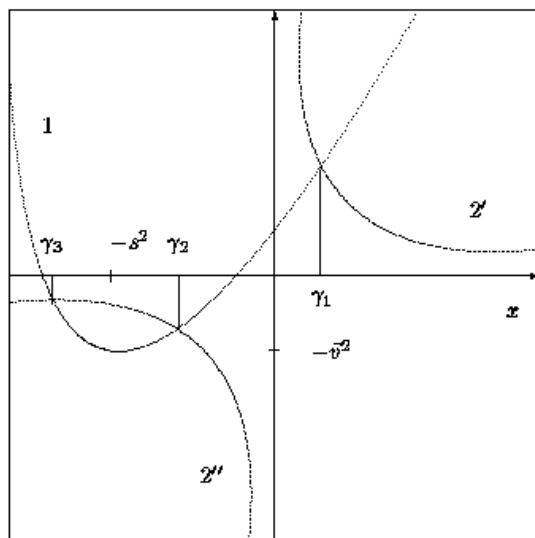


Рис. 5

График для определения корней γ_i уравнения $\det C(n=0) = 0$ для группы $SU(2)$. Парабола 1 пересекает ось x в точках $-s^2 \pm |v|$.

EXTRACT

**from the decision of the Special Council K.053.05.24
of M.V. Lomonosov Moscow State University
the 27th of April 1995**

By the decision of the Special Council **K.053.05.24** of Moscow M.V. Lomonosov State University (record of proceedings No 3 of the 27th of April 1995) **Edward Georgievich Timoshenko** has been conferred the degree *candidate of physical-mathematical sciences* after defence of the thesis "Boundary Effects and Confinement in the Theory of Nonabelian Gauge Fields" on the speciality 01.04.02 theoretical physics.

The thesis has been prepared in the Nuclear Physics Institute of Moscow State University.

Scientific adviser: Dr. N.A. Sveshnikov.

Official referees: Prof. A.S. Vshivtsev and Dr. F.V. Tkachov gave positive reports on the thesis.

Leading institution: Institute for High Energy Physics (Protvino) gave a positive report on the thesis.

The defendant has 7 published scientific papers on the subject including the following:

- N.A. Sveshnikov, E.G. Timoshenko, *Phys. Lett.* **B 289**, 423 (1992).
- E.G. Timoshenko, *J. Nucl. Phys.* **56 (11)**, 277 (1993).

Note: the degree *candidate of physical-mathematical sciences* corresponds to the degree Doctor of Philosophy (*Ph.D.*)

Chairman of the Council

Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences

Professor G.B. Khristiansen

Scientific Secretary of the Council