ВЕСТН. МОСК. УН-ТА. СЕР. 3, ФИЗИКА. АСТРОНОМИЯ. 1989. Т. 30, № 1

УДК 530.12

ГРАВИТАЦИОННЫЕ СИНГУЛЯРНОСТИ ТИПА КАУСТИК

Г. А. Сарданашвили, Э. Г. Тимошенко

(кафедра теоретической физики)

Описывается новый тип гравитационных сингулярностей, представляющих собой каустики пространственно-временных слоений.

Описание гравитационных сингулярностей как особенностей пространственно-временных слоений [1—3] позволяет в отличие от других методов установить структуру этих сингулярностей. В данной работе рассматриваются каустики пространственно-временных слоений.

Имеет место диаграмма

$$\begin{array}{ccc} GL(4, R) & \to & SO(4) \\ \downarrow & & \downarrow \\ SO(3, 1) & \to & SO(3) \end{array}$$

редукции структурной группы касательного расслоения $T(X^4)$ над гладким ориентируемым паракомпактным многообразием X^4, допускающим гравитационное поле g как глобальное сечение расслоения псевдоевклидовых билинейных форм в касательных пространствах к X^4. В силу этой диаграммы всякое гравитационное поле на многообразии X^4 определяет некоторое гладкое ориентируемое пространственно-временное распределение F 3-мерных пространственноподобных (относительно g) гиперплоскостей касательных пространств к X^4, задаваемое уравнением $h^0(F)=0$, где $h^0=h_\mu{}^0 dx^\mu$ — тетрадная форма поля g. Обратно, всякое 3-мерное гладкое ориентируемое распределение на X^4 является пространственно-временным относительно некоторого гравитационного поля [2, 3].

Распределение F называется интегрируемым (слоением), если его производящая форма h^0 удовлетворяет уравнению $h^0\wedge dh^0=0$. В этом случае многообразие X^4 расслаивается на 3-мерные пространственноподобные гиперповерхности такие, что слои распределения F являются касательными пространствами к этим гиперповерхностям. Пространственно-временное слоение считается причинным, если $h^0=Ndf$, где N и f — вещественные функции на X^4 такие, что $N\neq 0$ и $df\neq 0$ всюду на X^4.

Соответствие между гравитационными полями и пространственно-временными распределениями на многообразии X^4 позволяет описывать гравитационные сингулярности как особенности таких распределений. Поскольку всякое регулярное гравитационное поле локально допускает причинное слоение, особенности распределений можно описывать как особенности причинных слоений в терминах производящих функций f. Выделяются два типа таких особенностей.

1. Производящая функция f однозначна, но обладает критической точкой, где $df=0$. Она порождает хефлигеровскую структуру (сингулярное слоение поверхностей

уровня f на X^4, которые меняют свою топологию при прохождении через критическую точку функции f.

2. Функция f многозначна. В области, где она однозначна, функция f порождает слоение, которое, однако, разрушается в точках ветвления f, где его слои начинают друг с другом пересекаться. Чтобы это описать, можно поднять слоение F в тотальное пространство кокасательного расслоения $\operatorname{tl} T^*(X^4)$, там его продолжить и потом спроектировать обратно на базу X^4. Особенностям F будут отвечать особенности этой проекции, которые представляют собой точки каустики.

В теории гравитации (по аналогии с геометрической оптикой) каустикой обычно называют геометрическое место фокальных или сопряженных точек [4, 5]. Мы следуем более общему определению каустик как особенностей лагранжевых отображений [6]. Всякая такая каустика локально (в терминах ростков) может быть приведена к следующей канонической конструкции.

Рассмотрим пространство R^{2n} с координатами (x^μ, P_μ), 1-форму $\alpha = P_\mu dx^\mu$ на R^{2n} и n-мерное подмногообразие $N \subset R^{2n}$ такое, что $d\alpha|_N = 0$. Оно называется лагранжевым подмногообразием и может быть задано посредством производящей функции $S(x^i, P_j)$ от n переменных $\{x^i, P_j, i \in I, j \in J\}$, где (I, J) — некоторое разбиение множества $(1, \ldots, n)$, и определяется соотношениями

$$x^j = -\partial S/\partial P_j, \quad P_i = \partial S/\partial x^i.$$

Пусть $\pi : \{x^\mu, P_\mu\} \to \{x^\mu\}$ — проекция R^{2n} на R^n. Будучи суженной на лагранжево многообразие:

$$\pi_N : (x^i, P_j) \to (x^i, x^j = -\partial S/\partial P_j),$$

она называется лагранжевым отображением, а множество ее особых точек (где матрица $\partial^2 S/\partial P_i \partial P_j$ вырождена) — каустикой.

Пусть f — производящая функция слоения F на X. Определим вложение

$$\gamma : \{x^\mu\} \to \{x^\mu, P_\mu = \partial f/\partial x^\mu\}$$

многообразия X в тотальное пространство $\operatorname{tl} T^*(X)$. Его образ является лагранжевым подмногообразием $\operatorname{tl} T^*(X)$, наделенным индуцированным слоением $F' = \pi^*{}_{\gamma(X)} F$, где $\pi_{\gamma(X)} : \gamma(X) \to X$ — лагранжево отображение. Обратно, пусть $N \subset \operatorname{tl} T^*(X)$ — лагранжево подмногообразие с производящей функцией $S(x^i, P_j)$. Обозначим F' слоение поверхностей уровня функции

$$f'(x^i, P_j) = S - P_j \partial S/\partial P_j$$

на N. Образ $\pi_N(F')$ слоения F' при лагранжевом отображении π_N образует некоторую структуру на X, которая является слоением с производящей функцией $f(x^\mu) = f'(x^i, P_j(x^i, x^j))$ на области, где π_N не имеет особенностей. Это слоение разрушается в точках каустики отображения π_N, где функции $P_j(x^i, x^j)$ и $f(x^\mu)$ становятся многозначными. Известна классификация устойчивых каустик A_{2-5}, $D_{4,5}$ на 4-мерном многообразии.

Гравитационные сингулярности типа каустик имеют следующую отличительную особенность. Существуют области, где пересекаются не ближайшие, а, наоборот, отдаленные по значениям f слои слоения. Поэтому пространственно-временное слоение, а следовательно, и гравитационное поле в такой области могут быть локально продолжены за точки каустики. Приведем следующий пример.

Пусть $f(u, v)$ — по определению функция на R^2, удовлетворяющая уравнению $f^3 - 3uf - 2v = 0$. Эта функция однозначна:

$$f_+ = [v + (v^2 - u^3)^{1/2}]^{1/3} + [v - (v^2 - u^3)^{1/2}]^{1/3}$$

в области $U = (u, v : v^2 > u^3)$ и трехзначна:

$$f_{0,1,2} = 2u^{1/2} \cos\left(\frac{1}{3}(\varphi + 2\pi n)\right), \quad \varphi = \arccos(vu^{-3/2}), \quad n = 0, 1, 2$$

в точках $v^2 < u^3$. Пусть F — слоение $f_+(u, v) = c = \mathrm{const}$ на $U \subset R^2$. Его слои F_c представляют собой прямые линии $2v = c^3 - 3cu$. Это слоение образует каустику в точках $v^2 = u^3$ ветвления функции f, так что $u = v = 0$ — точка каустики типа A_3, а $v^2 = u^3 \neq 0$ — точки каустики типа A_2. Слои F_c, $c > \varepsilon > 0$ могут быть продолжены за линию каустики $v = u^{3/2}$ как слои слоения $f_0(u, v) = \mathrm{const}$ в области $0 < v < u^{3/2}$. Но они начинают пересекаться между собой, когда $v < 0$, хотя ближайшие друг к другу слои пересекаются только вблизи линии каустики $v = -u^{3/2}$. В то же время слои $F_{c>0}$ начинают пересекаться слоями $F_{c<0}$ уже на линии каустики $v = u^{3/2}$.

…ример сингулярности с каустикой указанного выше типа дает гравитационная …р волна ($h^0=Nd(f_+ + x^2)$)

$$ds^2 = 2dx^2du + [-f^2_{+,v} - (f_{+,u} - 1)^2]\,du^2 - dv^2 - (dx^3)^2.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Ivanenko D., Sardanashvily G.//Phys. Lett. 1982. **91A**. P. 341. [2] Sardanashvily G.//Acta Phys. Hung. 1985. **57**. P. 31. [3] Sardanashvily G., Yanchevsky V.//Acta Phys. Pol. 1986. **B17**. P. 1017. [4] Warner F.//Am. J. Math. 1965. **87**. P. 575. [5] Rosquist K.//Comm. Math. Phys. 1983. **88**. P. 339. [6] Арнольд В. И., Варченко А. Н., Гусейн-Заде С. М. Особенности дифференцируемых отображений. М., 1980.

Поступила в редакцию
23.06.88