КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

УДК 530.12

КАЛИБРОВОЧНАЯ МОДЕЛЬ ПЯТОЙ СИЛЫ

Г. А. Сарданашвили, Э. Г. Тимошенко

(кафедра теоретической физики)

Построены лагранжиан и уравнения калибровочной модели пятого фундаментального взаимодействия и получены соответствующие поправки к ньютоновскому потенциалу.

Гипотеза существования пятого фундаментального взаимодействия получила сейчас широкое распространение в связи с неоднозначными результатами лабораторных проверок ньютоновского закона тяготения. Под пятой силой пока понимают всю совокупность гипотетических эффектов, которые могли бы порождать добавки «юкавского» типа к ньютоновскому потенциалу. Нами была предложена модель такого взаимодействия, использующая калибровочные поля группы трансляций [1, 2]. Ее особенность в сравнении с другими аффинными калибровочными теориями состоит в построении отображения деформации пространственно-временного многообразия и рассмотрении материальных полей на таком многообразии.

Пусть AX — главное расслоение аффинных реперов со структурной аффинной группой $A(4, R)$ над пространственно-временным многообразием X^4. Снабдим его тотальное пространство P координатами $\{x^\mu, u^a, S^\mu_a\}$. Здесь x^μ — координаты в X^4, u^a — координаты подгруппы трансляций T_4 и S^μ_a—коэффициенты линейной связности, $\{St_a\}$ относительно репера $\{\partial_\mu\}$, где $\{t_a\}$ — фиксированный базис T_4 и S — элемент $GL(4, R)$. Отметим, что $\{x^\mu, u^\mu = S^\mu_a u^a\}$ являются координатами аффинного касательного расслоения $AT(X)$. Пусть в AX задана обобщенная аффинная связность. Ее форма связности ω и соответствующие горизонтальные поля τ^h на P имеют вид

$$\omega = (S^{-1})^a_\varepsilon (dS^\varepsilon_b + \Gamma^\varepsilon_{\mu\alpha}(x) S^\alpha_b dx^\mu) I^b_a + (du^a - B^a_\mu(x) dx^\mu) T_a,$$

$$\tau^h = \tau^\mu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + B^a_\mu(x) \frac{\partial}{\partial u^a} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\alpha}(x) S^\alpha_b \frac{\partial}{\partial S^\varepsilon_b} \right), \tag{1}$$

где I^a_b, T_a — генераторы группы $A(4, R)$, $\Gamma^\varepsilon_{\alpha\mu}$ — коэффициенты линейной связности, а $B^\varepsilon_\mu(x) = S^\varepsilon_a B^a_\mu(x)$ — калибровочные поля группы трансляций. Физическая интерпретация полей B вызывает трудности, поскольку материальные поля являются сечениями линейных, а не аффинных расслоений. Выход указывает пример полей B 3-мерных трансляций в теории дислокаций [3].

Придавая u смысл векторов смещения, рассмотрим следующее отображение ρ пространства P на тотальное пространство Q подрасслоения линейных реперов LX над X^4 в точках $S^\varepsilon_a u^a = u^\varepsilon(x)$:

$$(x^\mu, u^a, S^\mu_a) \to (\gamma^\mu(x^\varepsilon; u^\varepsilon(x) - S^\varepsilon_a u^a; 1), 0, S^\mu_a) = (x^\mu, 0, S^\mu_a),$$

где $\gamma(x; u; s)$ — геодезическая, проходящая через x в направлении u и определяемая линейной связностью Γ, а $u(x)$ — некоторое сечение расслоения $AT(X)$. Касательное к ρ отображение ρ_* касательного расслоения над P на касательное расслоение над Q преобразует поля (1) на P в поля

$$\tau^h_Q = \tau^\mu(x) (\delta^\nu_\mu + \mathscr{D}_\mu u^\nu(x)) \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \Gamma^\varepsilon_{\mu\alpha}(x) S^\alpha_b \frac{\partial}{\partial S^\varepsilon_b} \right] \tag{2}$$

на Q, где ковариантная производная поля $u(x)$ имеет вид

$$\mathscr{D}_{\mu} u^{\varepsilon}(x) = \partial_{\mu} u^{\varepsilon}(x) + \Gamma^{\varepsilon}_{\mu\alpha} u^{\alpha}(x) - B^{\varepsilon}_{\mu}(x) = \sigma^{\varepsilon}_{\mu}(x). \tag{3}$$

Отметим, что обычно в аффинных калибровочных моделях берут отображение $\beta: (x^{\mu}, u^{a}, S^{\mu}_{a}) \to (x^{\mu}, 0, S^{\mu}_{a})$ пространства P на Q в точках $S^{\varepsilon}_{a} u^{a} = u^{\varepsilon}(x)$. В этих точках $\beta = \rho$, но $\beta_{*} \neq \rho_{*}$. Сравнивая со случаем $B = 0$, $u(x) = 0$, отображения ρ и ρ_{*} можно интерпретировать как деформацию многообразия X^4. При этом калибровочным преобразованием трансляций поле $u(x)$ всегда можно обратить в нуль. Поэтому физически достоверными являются только его ковариантные производные (3).

Пусть φ — некоторое тензорное поле на X^4 и f_{φ} — соответствующая тензориальная функция на Q. Будем говорить, что φ задано на деформированном многообразии X^4, если его дифференцирование определено в виде $(\mathscr{D}\varphi)(\tau) = (df_{\varphi})(\tau^{h}_{Q})$, где τ^{h}_{Q} — горизонтальный (относительно Γ) лифт (2) поля $\tau = \tau^{\mu}\partial_{\mu}$. Это означает, что в теории поля деформацию многообразия можно учесть заменой в операторе внешнего дифференцирования $dx^{\mu}\mathscr{D}_{\mu}$ обычных ковариантных производных $\mathscr{D}_{\mu}$ на $\widetilde{\mathscr{D}}_{\mu} = (\delta^{\alpha}_{\mu} + \sigma^{\alpha}_{\mu})\mathscr{D}_{\alpha} = H^{\alpha}_{\mu}\mathscr{D}_{\alpha}$. Выпишем, например, лагранжиан скалярного поля:

$$L_{(\varphi)} = \frac{1}{2}\left[g^{\mu\nu} H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{\nu}\, \partial_{\alpha}\varphi\, \partial_{\beta}\varphi - m^2\varphi^2\right]$$

и функционал действия и уравнения движения точечной массы:

$$S = -m_0 \int \left[d_{\alpha\beta} H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{\nu} u^{\mu} u^{\nu}\right]^{1/2} ds, \quad \frac{du^{\mu}}{ds} + \widetilde{\Gamma}^{\mu}_{\alpha\beta} u^{\alpha} u^{\beta} = 0, \tag{4}$$

где величины $\widetilde{\Gamma}$ имеют вид символов Кристоффеля «метрики» $H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{\nu} g_{\alpha\beta}$, но ds определяется метрикой g. Лагранжианы гравитационного и электромагнитного полей $L_{(g)}$ и $L_{(A)}$ строятся обычным образом, но из модифицированных тензоров кривизны $H^{\varepsilon}_{\mu} H^{\beta}_{\nu} R^{ab}_{\varepsilon\beta}$ и напряженности $H^{\alpha}_{\mu} H^{\beta}_{\nu} F_{\alpha\beta}$.

Лагранжиан $L_{(\sigma)}$ самого калибровочного поля трансляций B^{ε}_{μ} нельзя построить по обычным правилам янг-миллсовской теории, поскольку алгебра Ли аффинной группы не допускает невырожденной инвариантной билинейной формы. Но его можно сконструировать из величин σ^{ν}_{μ} и $F^{\alpha}_{\mu\nu} = \mathscr{D}_{[\nu}\sigma^{\alpha}_{\mu]}$. При условии положительности компоненты $T^{00}_{(\sigma)}$ метрического тензора энергии-импульса поля σ он имеет вид ($a_1 > 0$, $a_2 > 0$, $\mu > 0$, $\lambda < \mu/4$, $\sigma_{\mu\nu} = g_{\mu\alpha}\sigma^{\alpha}_{\nu}$)

$$L_{(\sigma)} = \frac{1}{2}\left[a_1 F^{\mu}_{\nu\mu} F^{\nu\alpha}_{\alpha} + a_2 F_{\mu\nu\sigma}\left(F^{\mu\nu\sigma} - 2F^{\nu\mu\sigma}\right) - \mu\sigma^{\mu}_{\nu}\sigma^{\nu}_{\mu} + \lambda\sigma^{\mu}_{\mu}\sigma^{\nu}_{\nu}\right].$$

Источниками поля σ являются: укороченный канонический тензор энергии-импульса материальных полей

$$\frac{\delta L_{(m)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} = (H^{-1})_{\nu\beta}\, \mathscr{D}_{\mu}\varphi\, \frac{\partial L_{(m)}}{\partial \mathscr{D}_{\beta}\varphi} = (H^{-1})_{\nu\beta}\left(t^{\beta}_{(m)\mu} + \delta^{\beta}_{\mu} L_{(m)}\right),$$

укороченный метрический тензор энергии-импульса электромагнитного поля A и тензор кривизны $-\varkappa^{-1} H^{\nu}_{\mu} R^{\mu\gamma}_{\gamma\varepsilon}$ гравитационного поля. Но вместо последнего, используя уравнения Эйнштейна, можно подставить его выражение через метрические тензоры энергии-импульса материи и самого поля σ. Тогда уравнение для σ принимает вид

$$\frac{\delta L_{(\sigma)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} = \left[-\frac{\delta L_{(m)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} - (H^{-1})_{\nu\beta}\left(T^{\beta}_{(m)\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\mu} T_{(m)}\right)\right] -$$

$$- (H^{-1})_{\nu\mu} L_{(A)} + (H^{-1})_{\nu\beta}\left(T^{\beta}_{(\sigma)\mu} - \frac{1}{2}\delta^{\beta}_{\mu} T_{(\sigma)}\right). \tag{5}$$

Ограничимся случаем слабого поля σ, пренебрегая в левой части уравнения (5) взаимодействием σ с гравитационным полем и кручением, а в правой — членами с σ. Получаем

$$\frac{\delta L_{(\sigma)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} = a_1\left(\eta_{\mu\nu}\partial^{\varepsilon}F^{\alpha}_{\alpha\varepsilon} - \partial_{\mu}F^{\alpha}_{\alpha\nu}\right) + 2a_2\partial^{\varepsilon}\left(F_{\mu\nu\varepsilon} + F_{\varepsilon\mu\nu} - F_{\nu\mu\varepsilon}\right) - \mu\sigma_{\mu\nu} + \lambda\eta_{\mu\nu}\sigma^{\alpha}_{\alpha}.$$

Рассмотрим уравнение (5) в пустоте. С учетом условия

$$\partial^{\nu}\frac{\delta L_{(\sigma)}}{\delta\sigma^{\mu\nu}} = -\mu\partial^{\nu}\sigma_{\mu\nu} + \lambda\partial_{\mu}\sigma = 0 \tag{6}$$

оно разбивается на уравнения для антисимметричной $\omega_{\mu\nu} = (1/2)\,\sigma_{[\mu\nu]}$ и симметричной $e_{\mu\nu} = (1/2)\,\sigma_{(\mu\nu)}$ $(e = \sigma^{\alpha}_{\alpha})$ частей поля σ:

$$4a_2\partial^{\varepsilon}\left(\omega_{\mu\varepsilon,\nu} + \omega_{\nu\mu,\varepsilon} - \omega_{\nu\varepsilon,\mu}\right) + 2a_1\omega_{\alpha[\nu,\mu]\alpha} - \mu\omega_{\mu\nu} = 0, \tag{7}$$

$$a_1(\lambda/\mu - 1)\left[\eta_{\mu\nu}\Box e - e_{,\mu\nu}\right] + 2a_1\omega_{\alpha(\nu,\mu)\alpha} - \mu e_{\mu\nu} + \lambda\eta_{\mu\nu}e = 0. \tag{8}$$

В качестве решения уравнения (7) выберем $\omega = 0$, а уравнение (8), используя свертку по индексам μ и ν, запишем в виде

$$\Box e + m^2 e = 0, \quad m^2 = \frac{\mu(\mu - 4\lambda)}{3a_1(\mu - \lambda)},$$

$$e_{\mu\nu} = \frac{\mu - \lambda}{3\mu}\left(\eta_{\mu\nu}e - m^{-2}\left(\frac{\mu - 4\lambda}{\mu - \lambda}\right)e_{,\mu\nu}\right).$$

Оно допускает плосковолновые решения.

При наличии источников выражение (6) не равно нулю и в общем случае не является градиентом, поэтому $\mu \neq 0$. Например, в случае точечной массы M источником в правой части уравнения (5) будет $-(1/2)\eta_{\mu\nu}M\delta(r)$ и его стационарное центрально-симметричное решение имеет вид

$$e_{rr} = -(\mu - \lambda)^{-1}\left(3\lambda e_{00} + \frac{1}{2}M\delta(r)\right), \quad e_{\theta\theta} = -e_{00}r^2, \; e_{\varphi\varphi} = -e_{00}r^2\sin^2\theta,$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}e_{00} - m^2 e_{00} = -\frac{1}{6}\frac{\mu}{a_1(\mu - \lambda)}M\delta(r), \quad e_{00} = -\frac{\mu M}{6a_1(\mu - \lambda)r}e^{-mr}.$$

Подставляя это решение в уравнение движения пробной частицы (4), получаем поправку к ньютоновскому гравитационному потенциалу:

$$\varphi' = \varphi + e_{00} = -\frac{M}{8\pi r}\left(\varkappa - \frac{\mu}{3a_1(\mu - \lambda)}e^{-mr}\right).$$

Отметим, что пятое взаимодействие, дающее вклад в гравитационные эффекты, должно быть таким же универсальным, как и гравитация. Для этого, в частности, его материальным источником должны быть масса или другие составляющие тензора энергии-импульса материи и оно должно описываться массивным полем, хотя и с необычно малой массой. Приведенная выше калибровочная модель удовлетворяет этим условиям. Так, масса m выражается через константы μ и λ в лагранжиане $L_{(\sigma)}$, которые имеют смысл коэффициентов «упругости» пространственно-временного многообразия и могут считаться достаточно малыми, но $m \neq 0$, поскольку $\mu \neq 0$, $\lambda < \mu/4$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Sardanashvily G., Gogberashvily M.//Mod. Phys. Lett. 1987. **A8**. P. 609. [2] Сарданашвили Г. А., Гогберашвили М. Я.//Изв. вузов, Физика. 1988. №. 3. С. 71. [3] Кадич А., Еделен Д. Калибровочная теория дислокаций и дисклинаций. М., 1987.

Поступила в редакцию
29.09.89